

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ  
ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ  
И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

**Зоопарк чудовищ или знакомство со  
специальными функциями**

**О.М. Киселев**

Уфа 2012

УДК 51+ 54  
ББК 22.1+24  
Ф94

Монография издана при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-06831-моб-г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Редакционная коллегия:

д-р хим. наук, проф. Р.Ф. Талипов (проректор по науке БашГУ);  
д-р физ.-мат. наук, проф. Б.Н. Хабибуллин (отв. редактор);  
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Картак;  
канд. физ.-мат. наук. Р.Н. Гарифуллин;

Ф94 Международная школа-конференция для студентов,  
аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная  
математика и ее приложения в естествознании».

Монография.–Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными функциями. Уфа: БашГУ, 2012.–104с.

УДК 51+54  
ББК 22.1+24

ISBN 978-5-7477-2944-5

©О.М.Киселев, 2012

# Оглавление

0.1	Предисловие . . . . .	6
0.1.1	Предисловие к первой электронной версии . . . . .	6
0.1.2	Предисловие к первому печатному изданию . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Линейные уравнения</b>	<b>7</b>
1.1	Гамма-функция. . . . .	7
1.1.1	Определение . . . . .	7
1.1.2	Интегральное представление . . . . .	8
1.1.3	Область определения и полюсы . . . . .	10
1.1.4	Предельная форма Эйлера . . . . .	11
1.1.5	Произведение гамма-функций . . . . .	13
1.1.6	Задача . . . . .	14
1.1.7	Литература . . . . .	14
1.2	Гипергеометрическая функция . . . . .	15
1.2.1	Интегральная формула . . . . .	16
1.2.2	Гипергеометрическое уравнение . . . . .	17
1.2.3	Окрестность точки $z = 1$ . . . . .	19
1.2.4	Задача . . . . .	20
1.2.5	Литература . . . . .	20
1.3	Регулярные особые точки дифференциального уравнения . . . . .	20
1.3.1	Решение дифференциального уравнения в виде ряда . . . . .	20
1.3.2	Классификация особых точек дифференциального уравнения . . . . .	22
1.3.3	Показатели особых точек гипергеометрического уравнения . . . . .	24
1.3.4	Задача . . . . .	25
1.3.5	Литература . . . . .	25
1.4	Функция Эйри . . . . .	25
1.4.1	Уравнение Эйри . . . . .	26
1.4.2	Решение в виде ряда . . . . .	27

1.4.3	Интегральное представление общего решения уравнения Эйри . . . . .	28
1.4.4	Представление функции Эйри в виде ряда . . . . .	32
1.4.5	Задача . . . . .	32
1.4.6	Литература . . . . .	32
1.5	Функции параболического цилиндра . . . . .	32
1.5.1	Уравнение параболического цилиндра . . . . .	33
1.5.2	Ряд Тейлора для решений . . . . .	34
1.5.3	Интегральное представление . . . . .	34
1.5.4	Формулы связи при различных параметрах . . . . .	37
1.5.5	Значения в начале координат . . . . .	38
1.5.6	Литература . . . . .	39
1.6	Интеграл Френеля и метод стационарной фазы . . . . .	39
1.6.1	Формулы для интегралов Френеля . . . . .	39
1.6.2	Поведение при больших значениях аргумента . . . . .	40
1.6.3	Метод стационарной фазы . . . . .	43
1.6.4	Задача . . . . .	46
1.6.5	Литература . . . . .	46
1.7	Функция Бесселя . . . . .	46
1.7.1	Уравнение Бесселя . . . . .	46
1.7.2	Разностное уравнение . . . . .	48
1.7.3	Интегральное представление . . . . .	49
1.7.4	Асимптотика функции Бесселя . . . . .	51
1.7.5	Задачи . . . . .	52
1.7.6	Литература . . . . .	52
1.8	Явление Стокса . . . . .	52
1.8.1	Формальные решения в виде асимптотических рядов . . . . .	53
1.8.2	Обоснование асимптотик . . . . .	54
1.8.3	Функции Ганкеля . . . . .	57
1.8.4	Явление Стокса. . . . .	57
1.8.5	Задача . . . . .	58
1.8.6	Литература . . . . .	58
<b>2</b>	<b>Эллиптические функции</b>	<b>59</b>
2.1	Функция Вейерштрасса . . . . .	59
2.1.1	Дифференциальное уравнение . . . . .	59
2.1.2	Двоякопериодичность . . . . .	60
2.1.3	Представление в виде ряда . . . . .	62
2.1.4	Четность . . . . .	62
2.1.5	Связь между $\omega_1, \omega_2$ и параметрами уравнения . . . . .	63
2.1.6	Теорема Лиувилля . . . . .	63

2.1.7	Задача . . . . .	64
2.1.8	Литература . . . . .	64
2.2	Эллиптические функции Якоби . . . . .	65
2.2.1	Функция синус амплитуды . . . . .	65
2.2.2	Периодичность . . . . .	66
2.2.3	Эллиптические функции Якоби . . . . .	67
2.2.4	Разложение в окрестности нуля аргумента . . . . .	69
2.2.5	Разложение в окрестности нулевого значения параметра . . . . .	69
2.2.6	Разложение в окрестности $k = 1$ . . . . .	70
2.2.7	Задачи . . . . .	71
2.2.8	Литература . . . . .	71
2.3	Тэта-функции . . . . .	72
2.3.1	Тэта-функция Якоби . . . . .	72
2.3.2	Дифференциальное уравнение . . . . .	73
2.3.3	Еще три тэта-функции . . . . .	73
2.3.4	Нули тэта-функций . . . . .	75
2.3.5	Соотношения между квадратами . . . . .	75
2.3.6	Тэта-функции и функция синус амплитуды . . . . .	77
2.3.7	Задача . . . . .	78
2.3.8	Литература . . . . .	78
2.4	Интегрируемые волчки . . . . .	78
2.4.1	Уравнения Эйлера-Пуансо . . . . .	79
2.4.2	Волчок Эйлера . . . . .	81
2.4.3	Волчок Лагранжа . . . . .	83
2.4.4	Волчок Ковалевской . . . . .	84
2.4.5	Задачи . . . . .	86
2.4.6	Литература . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Функции Матьё и Ламе</b>	<b>88</b>
3.1	Функции Матьё . . . . .	88
3.1.1	Уравнение Хилла и теория Флоке . . . . .	88
3.1.2	Примеры . . . . .	90
3.1.3	Функции Матьё . . . . .	92
3.1.4	Построение функций Матьё . . . . .	93
3.1.5	Уравнение Матьё в форме Линдемана . . . . .	95
3.1.6	Задача . . . . .	96
3.1.7	Литература . . . . .	96
3.2	Уравнение Ламе . . . . .	96
3.2.1	Уравнение Ламе . . . . .	96
3.2.2	Алгоритм построения функций Ламе . . . . .	97

3.2.3	Специальный случай уравнения Ламе . . . . .	98
3.2.4	Вырожденный случай . . . . .	100
3.2.5	Литература . . . . .	101

## 0.1 Предисловие

### 0.1.1 Предисловие к первой электронной версии

Курс лекций посвящен знакомству со специфическим разделом математики – специальными функциями. Под специальной функцией можно понимать любую функцию, не входящую в число элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры и анализа. Конечно это определение неконструктивно. Отбор материала для предлагаемого курса лекций связан с моими научными интересами в области нелинейных дифференциальных уравнений. Метод исследования свойств спецфункций основан на анализе соответствующих решений дифференциальных уравнений.

Этот спецкурс читался пятикурсникам Уфимского Авиационного Технического Университета, специализирующимся по прикладной математике, в осеннем семестре 1999-2000 учебного года, а также студентам-математикам 3-го и 4-го курсов Башкирского Государственного Университета, специализирующимся по дифференциальным уравнениям, в весеннем семестре того же учебного года. Хочу выразить благодарность всем моим слушателям за проявленный интерес и внимание.

О. Киселев  
ok@ufanet.ru

### 0.1.2 Предисловие к первому печатному изданию

По сравнению с электронной версией, доступной в сети интернет с 2000 года, в предлагаемом варианте добавлены разделы про интегралы Френеля, функцию Эйри и функции параболического цилиндра. Изменен раздел о гамма-функции, исправлены найденные опечатки, добавлены графики. Лекции сопровождаются задачами для самостоятельного прояснения читателем некоторых неразобранных в тексте тем.

Благодарю И.Г. Прокшину за поддержку и доц. С.Г. Глебова за полезные замечания. Издание печатается в рамках лекций "Международной уфимской школы-конференции по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых учёных".

О. Киселев  
ok@ufanet.ru  
Уфа, июнь 2012

# Глава 1

## Линейные дифференциальные уравнения и специальные функции

В этой главе рассмотрены гамма-функция, интегралы Френеля, гипергеометрическая функция, функция Эйри и решения уравнений Бесселя – функции Бесселя и Ганкеля. Большинство из них могут быть представлены в виде интегралов типа Фурье. Вывод такого представления основывается на решении дифференциальных уравнений в образах Фурье. Собранные здесь функции объединяет метод построения и способы исследования их свойств – ряды Тейлора, теорема Коши и метод стационарной фазы.

### 1.1 Гамма-функция.

*Интегральное представление гамма-функции получено как решение разностного уравнения. Исследовано поведение гамма-функции в полюсах. Выведена формула для произведения гамма-функций.*

#### 1.1.1 Определение

Если провести статистический анализ математических текстов, то окажется, что восклицательный знак встречается значительно чаще вопросительного. Почему? Может сложиться впечатление, что математики так выражают своё восторженное отношение к своим работам. Это впечатление верно только отчасти. Дело в том, что восклицательный знак в математических трудах обычно означает взятие факториала какого-либо



целого неотрицательного числа:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Функцию факториал можно еще записать в виде рекурсионного соотношения:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!.$$

Это соотношение можно рассматривать не только при целых значениях  $n$ . Однако, в этом случае хорошо бы новую функцию обозначить по-другому, чтобы не путать с хорошо знакомой функцией факториал.

Обозначим независимую переменную  $z$ , а искомую функцию  $\Gamma(z)$ . Чтобы функция была похожа на факториал, запишем соотношение:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.1)$$

На эту формулу можно смотреть как на уравнение. Одно из решений этого уравнения называется гамма-функцией. Решение уравнения (1.1) похоже на функцию факториал, например, для натуральных чисел  $\Gamma(n) \equiv (n + 1)!$ .

Для математической строгости хорошо бы ещё объявить область определения функции  $\Gamma(z)$  и область её значений. Но пока этого делать не будем. Ближайшая задача – представить хоть какое-то решение уравнения (1.1), например, для вещественных  $z$ . Несмотря на простую форму записи, в элементарных функциях это уравнение не решается. Гамма-функцию можно записать в виде ряда или в виде интеграла. Для изучения глобальных свойств гамма-функции обычно пользуются интегральным представлением.

### 1.1.2 Интегральное представление

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде интеграла Лапласа:

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) dp.$$

В этом случае правая часть уравнения (1.1) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= z \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) dp = \\ &= -\tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) \Big|_{p=-\infty}^{p=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}(p)}{dp} \exp(-pz) dp. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Конечно, эта формула справедлива, если существуют пределы для внеинтегрального члена. Заранее нам неизвестно поведение образа  $\tilde{\Gamma}(p)$  при  $p \rightarrow \pm\infty$ .

*Предположим*, что образ гамма-функции таков, что сумма внеинтегральных слагаемых равна нулю. После того, как будет найдено решение, конечно, надо будет проверить, верно ли это предположение.

Левая часть равенства (1.1) записывается следующим образом:

$$\Gamma(z+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) \exp(-p) dp.$$

Тогда уравнение (1.1) для образа гамма-функции имеет вид:

$$\tilde{\Gamma}(p) \exp(-p) = \frac{d\tilde{\Gamma}(p)}{dp}.$$

Это уравнение легко решить, разделив переменные:

$$\frac{d\tilde{\Gamma}}{\tilde{\Gamma}} = \exp(-p) dp,$$

или

$$\tilde{\Gamma} = -C \exp(-\exp(-p)), \quad \text{где параметр } C \text{ не зависит от } p.$$

Проверим свойства внеинтегральных слагаемых в формуле (1.2).

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -\infty} \exp(-\exp(-p)) \exp(-pz) &= 0; \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \exp(-\exp(-p)) \exp(-pz) &= \begin{cases} 0, & z > 0; \\ \infty, & z \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, вычисления справедливы при  $z > 0$ .

Зная образ Лапласа для решения уравнения (1.1), легко получить и выражение для прообраза:

$$\Gamma(z) = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\exp(-p)) \exp(-pz) dp.$$

Это неканоническая формула, для того, чтобы привести ее к виду, полученному Эйлером, надо сделать замену переменной интегрирования:  $t = \exp(-p)$ , тогда интеграл примет вид:

$$\Gamma(z) = C \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{(z-1)} dt.$$

Вместо  $C$  можно использовать любую периодическую функцию  $C(z+1) = C(z)$ . Гамма-функцией называется специальное решение, такое, в котором  $C \equiv 1$ .

$$\Gamma(1) = C \int_0^{\infty} \exp(-t) dt = 1.$$

Окончательно, получаем интегральную формулу Эйлера для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1} dt. \quad (1.3)$$

Эта функция очень часто встречается в математических текстах. При работе со специальными функциями, пожалуй, даже чаще, чем восклицательный знак.

Проверить, что функция, определенная формулой (1.3), действительно удовлетворяет уравнению (1.1), можно, проинтегрировав интеграл в правой части этой формулы по частям:

$$\Gamma(z) = \frac{t^z}{z} \exp(-t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \exp(-t)t^z dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

### 1.1.3 Область определения и полюсы

В подынтегральной функции в (1.3) при  $t \rightarrow \infty$  экспонента  $\exp(-tz)$  при  $\operatorname{Re}(z) > 0$  убывает гораздо быстрее, чем растет алгебраическая функция  $t^{z-1}$ . Особенность в нуле – интегрируемая, поэтому несобственный интеграл в (1.3) сходится абсолютно и равномерно при  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Продифференцируем  $\Gamma(z)$ :

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \int_0^{\infty} \exp(-t) \log(t)t^{z-1} dt.$$

Интеграл сходится при  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Следовательно, гамма-функция голоморфна в правой полуплоскости комплексного параметра  $z$ .

Непригодность интегрального представления (1.3) при  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  не означает, что при  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  не определена сама гамма-функция – решение уравнения (1.1).

Исследуем поведение  $\Gamma(z)$  в окрестности нуля. Для этого рассмотрим  $\Gamma(z+1)$ . В окрестности  $z = 0$  функция  $\Gamma(1+z)$  голоморфная, она может быть записана в виде:

$$\Gamma(z+1) = 1 + zf(z),$$

где  $f(z)$  – голоморфная функция в окрестности  $z = 0$ . Из формулы (1.1) следует:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z.$$

Тогда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + f(z),$$

то есть  $\Gamma(z)$  имеет полюс первого порядка при  $z = 0$ .

Также легко получить:

$$\Gamma(z - 1) = \Gamma(z)/(z - 1) = \frac{1}{(z - 1)z} + \frac{f(z)}{(z - 1)},$$

то есть в окрестности точки  $z = -1$  функция  $\Gamma(z)$  также имеет полюс первого порядка.

Таким же образом можно получить формулу:

$$\Gamma(z - n) = \frac{1 + zf(z)}{z(z - 1)(z - 2) \cdots (z - n)}. \quad (1.4)$$

Из этой формулы следует, что точки  $z = 0, -1, -2, \dots$  – простые полюсы функции  $\Gamma(z)$ , и других полюсов эта функция не имеет. Нетрудно вычислить вычет в точке  $z = -n, n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

#### 1.1.4 Предельная форма Эйлера

Гамма-функцию можно представить в виде бесконечного произведения. Это можно заметить, если в интеграле (1.3) представить

$$\exp(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Тогда интегральное представление гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{(z-1)} dt.$$

Оказывается, в этой формуле можно поменять пределы – предел интегрирования в несобственном интеграле и предел при  $n \rightarrow \infty$  внутри

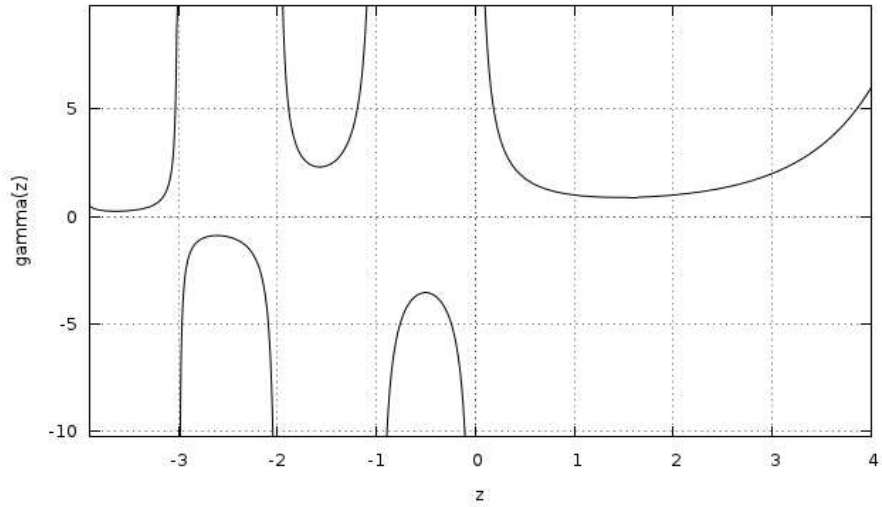


Рис. 1.1: График гамма-функции вещественной переменной.

интеграла. Перестановка пределов – тонкая операция. Здесь доказательство возможности этой перестановки опущено. Приведем результат:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Проинтегрируем по частям этот интеграл:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{t^{z-1+1}}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \Big|_{t=0}^{t=n} - \\ &- \int_0^n \frac{t^{z-1+1}}{z} (-1) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \frac{1}{z} \int_0^n t^z \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

В результате удалось понизить степень монома  $(1 - t/n)^n$  на единицу. Проинтегрируем по частям еще раз:

$$\Gamma_n(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z+1} \frac{n-1}{n} \int_0^n t^{z+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt.$$

Проинтегрировав по частям  $n$  раз получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{1}{z} \frac{n-1}{n(z+1)} \frac{n-2}{n(z+2)} \cdots \frac{1}{n(z+n-1)} \frac{n^{z+n}}{(z+n)} = \\ &= \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим предельную формулу Эйлера для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}. \quad (1.5)$$

Из этой формулы следует, что гамма-функция не обращается в нуль в комплексной плоскости. Полюсы гамма-функции – отрицательные целые.

### 1.1.5 Произведение гамма-функций

Цель этого параграфа – вывести формулу для произведения гамма-функций

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для вывода этой формулы воспользуемся предельной формулой для гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n! n^z}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{(-z)\Gamma(-z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-z)(-z+1)(-z+2) \dots (-z+n)}{n! n^{-z}}.$$

Произведение даст:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n! n^z} \times \\ &\times \frac{1}{(-z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-z)(-z+1)(-z+2) \dots (-z+n)}{n! n^{-z}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Произведение есть ни что иное, как формула для функции  $\sin(\pi z)$ . В результате получится искомая формула:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$$

или

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Ниже понадобится формула, в которой произведение двух гамма-функций представляется через одну гамма-функцию. Выведем эту формулу, используя интегральное представление гамма-функций.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\infty} \exp(-y)y^{q-1}dy \int_0^{\infty} \exp(-x)x^{p-1}dx.$$

Повторный интеграл представим как двойной несобственный интеграл. Это можно сделать, воспользовавшись теоремой Фубини. В результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x>0, y>0} \exp(-y)y^{q-1} \exp(-x)x^{p-1} dx dy.$$

Несобственный интеграл равномерно сходится. Его можно рассматривать, например, как интеграл по треугольнику, ограниченному осями координат и прямой  $x + y = R$  при  $R \rightarrow \infty$ . В двойном интеграле сделаем замену переменных:

$$x + y = u, \quad y = uv.$$

Якобиан этой замены

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = u.$$

Пределы интегрирования:  $u$  меняется от 0 до  $\infty$ ,  $v$  при этом меняется от 0 до 1. В результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{0 \leq u, 0 \leq v \leq 1} \exp(-u)u^{p+q-1}v^{q-1}(1-v)^{q-1} du dv.$$

Перепишем опять этот интеграл как повторный, в результате получим:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv,$$

где  $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} v > 0$ .

### 1.1.6 Задача

Обосновать перестановку пределов при выводе представления гамма-функции в предельной форме Эйлера.

### 1.1.7 Литература

- 1 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции М.:Наука, 1990.
- 2 Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

## 1.2 Гипергеометрическая функция

*Гипергеометрическая функция – обобщение геометрической прогрессии обладает рядом замечательных свойств, благодаря которым она привлекала внимание математиков в течение по крайней мере двух веков. Изучение этой функции привело Гаусса к исследованию вопроса сходимости рядов, Римана – к задаче об аналитическом продолжении и к изучению дифференциальных уравнений с особыми точками.*

Гипергеометрическая функция реализует примитивную мечту философов о философском камне. Правда, в миниатюре – только для элементарных функций и то не для всех. Судите сами. Функция, зависящая от четырех параметров  $F(a, b, c, z)$  такова, что:

$$F(1, b, b, z) = \frac{1}{1-z}; \quad F(-n, b, b, z) = (1-z)^n; \quad zF(1, 1, 2, -z) = \ln(1+z);$$

и, более того:

$$\exp(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(1, b, 1, z/b).$$

Вполне естественно, что функция со столь интересными свойствами занимала умы математиков. Прежде всего изучали свойства ряда по степеням  $z$ . Коэффициенты этого ряда зависят от параметров  $a, b, c$ :

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{1c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 c(c+1)}z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \times 2 \times 3 c(c+1)(c+2)}z^3 + \dots$$

Название "гипергеометрический" этому ряду дал Валлис в 1655 году. Позже его изучали Эйлер и Куммер. Однако до работ Гаусса это ряд нельзя было называть функцией в современном понимании этого слова. Гаусс доказал сходимость гипергеометрического ряда и, следовательно, существование гипергеометрической функции.

Тем не менее проблемы оставались и после работ Гаусса. Легко понять, что гипергеометрический ряд сходится лишь в единичном круге на комплексной плоскости, в то время, как гипергеометрическая функция может быть аналитически продолжена и за границу этого круга. Проблема – построить аналитическое продолжение гипергеометрической функции на всю комплексную плоскость. Такое аналитическое продолжение можно сделать, изучив свойства решений дифференциального уравнения для гипергеометрической функции. Это уравнение названо гипергеометрическим. Оно изучалось Риманом.



### 1.2.1 Интегральная формула

Гипергеометрический ряд имеет вид:

$$F(a, b, c, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+s-1)b(b+1)\dots(b+s-1)}{c(c+1)\dots(c+s-1)} \frac{z^s}{s!}. \quad (1.6)$$

Здесь предполагается, что  $c \neq 0$ , и  $c$  не равно отрицательному целому числу.

Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, легко показать, что радиус сходимости ряда (1.6) равен единице.

Теперь наша задача – написать аналитическое продолжение функции  $F(a, b, c, z)$  при  $|z| \geq 1$ . Для этого представим произведения  $(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$  через гамма-функции:

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}.$$

Тогда:

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)}.$$

Здесь воспользуемся формулой для произведения гамма-функций:

$$\Gamma(b+k)\Gamma(c-b) = \Gamma(c+k) \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} dt,$$

в результате получим:

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1+k}(1-t)^{c-b-1} dt.$$

Это выражение подставим в формулу для  $F(a, b, c, z)$ :

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k \int_0^1 t^{b-1+k}(1-t)^{c-b-1} dt.$$

Так как ряд и интеграл сходятся абсолютно и равномерно, то можно поменять знак интеграла со знаком суммы. В результате получим:

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k t^k.$$

Дальше надо воспользоваться известной формулой биномиального разложения:

$$\frac{1}{(1-tz)^a} = 1 + atz + \frac{a(a+1)}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k t^k.$$

Окончательно получается интегральное выражение для гипергеометрической функции.

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt.$$

Эта формула получена Эйлером.

Нетрудно видеть, что необходимым условием существования интеграла при  $\forall z \in \mathbf{C}$  являются условия  $\operatorname{Re}(b) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(c) > b$  и  $\operatorname{Re}(a) < 0$ . Область значений параметра  $a$  можно расширить до  $\operatorname{Re}(a) < 1$ , если исключить точки  $z = 1$  и  $z = \infty$ . Для  $\operatorname{Re}(a) \geq 1$  надо исключить точки, лежащие на луче  $z \in [1, \infty)$ .

Интегральное представление позволяет продолжить гипергеометрическую функцию во внешность единичного круга по параметру  $z$ .

### 1.2.2 Гипергеометрическое уравнение

Гипергеометрическим уравнением называется уравнение вида:

$$z(z-1)w'' + ((a+b+1)z-c)w' + abw = 0. \quad (1.7)$$

С помощью прямой подстановки ряда для гипергеометрической функции можно убедиться, что она является решением этого дифференциального уравнения.

Если это уравнение записать в стандартном виде:

$$w'' - \frac{(c - (a+b+1)z)}{z(z-1)} w' + \frac{ab}{z(z-1)} w = 0,$$

тогда легко видеть, что коэффициенты гипергеометрического уравнения имеют особенности в точках  $z = 0$ ,  $z = 1$ . Еще одна особая точка для коэффициентов этого уравнения  $z = \infty$ . Чтобы убедиться в этом, сделаем замену независимой переменной:  $t = 1/z$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \frac{dt}{dz} \frac{d}{dt} = -t^2 \frac{d}{dt}, \\ \frac{d^2}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( -t^2 \frac{d}{dt} \right) = -2t^3 \frac{d}{dt} + t^4 \frac{d^2}{dt^2}. \end{aligned}$$

Гипергеометрическое уравнение примет вид:

$$\frac{1-t}{t^2} \left( -2t^3 w'(t) + t^4 w'' \right) - \left( \frac{a+b+1}{t} - c \right) t^2 w'(t) + abw = 0$$

или

$$w'' - \left( \frac{c}{t-1} - \frac{a+b+1}{t(t-1)} + \frac{2}{t} \right) w' + \frac{ab}{t^2(1-t)} w = 0.$$

То есть  $t = 0$  (или, что тоже самое  $z = \infty$ ) – особая точка для коэффициентов уравнения.

Одно из решений гипергеометрического уравнения нам известно. Построим второе решение, линейно независимое к первому. Будем полагать, что  $|z| < 1$ . Вычислим вронскиан  $W(z)$  двух линейно независимых решений.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{c - (a+b+1)z}{z(z-1)} W.$$

Решение этого уравнения:

$$W(z) = W_0 \exp\left(\int \frac{c - (a+b+1)z}{z(z-1)} dz\right).$$

Интеграл:

$$\int \frac{c - (a+b+1)z}{z(z-1)} dz = c \ln|z-1| - c \ln|z| - (a+b+1) \ln|z-1| + \text{const.}$$

Тогда

$$W(z) = W_0 z^{-c} (1-z)^{c-a-b-1}.$$

Второе решение получается стандартным путем – из формулы для вронскиана:

$$w_1 w_2' - w_1' w_2 = W(z)$$

или

$$w_2 = w_1 \int \frac{W(z)}{w_1^2(z)} dz.$$

Если  $w_1(z) \equiv F(a, b, c, z)$ , тогда:

$$w_2(z) = F(a, b, c, z) \int \frac{W_0 z^{-c} (1-z)^{c-a-b-1}}{F^2(a, b, c, z)} dz.$$

Выясним поведение  $w_2$  в окрестности точки  $z = 0$ :

$$w_2(z) = W_0 \left(1 + \frac{ab}{c} z + O(z^2)\right) \int \left(\frac{z^{-c}(1+O(z))}{1+O(z)}\right) dz = z^{1-c} (\text{const} + O(z)).$$

То есть, линейно независимое к  $F(a, b, c, z)$  решение гипергеометрического уравнения в нуле имеет точку ветвления порядка  $1 - c$ .

Дальше кажется естественным искать решение  $w_2$  в виде  $w_2 = z^{1-c}f$ . Подставив эту формулу в гипергеометрическое уравнение и проделав соответствующие вычисления, получим:

$$f'' - \frac{(2c - b - a - 3)z - c + 2}{(z - 1)z}f' + \frac{c^2 + (-b - a - 2)c + b + a + 1}{(z - 1)z}f = 0.$$

$$f'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1 - z)}f' + \frac{\alpha\beta}{z(1 - z)}f = 0,$$

где  $\alpha = 1 + a - c$ ,  $\beta = 1 + b - c$ ,  $\gamma = 2 - c$ .

Итак, второе решение гипергеометрического уравнения (1.7) имеет вид:

$$w_2 \equiv G(z) = z^{1-c}F(1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c).$$

*Из этих построений можно сделать вывод, что несмотря на сингулярность коэффициентов гипергеометрического уравнения в окрестности точки  $z = 0$ , можно построить два его линейно независимых решения, с помощью степенных рядов по параметру  $z$ .*

### 1.2.3 Окрестность точки $z = 1$

Для удобства перепишем гипергеометрическое уравнение (1.7) в окрестности  $z = 1$ . Для этого сделаем замену переменной  $x = 1 - z$ . Тогда уравнение примет вид:

$$w'' + \frac{c - (a + b + 1)(1 - x)}{(1 - x)x}w' + \frac{ab}{x(1 - x)}w = 0.$$

Это уравнение легко приводится к стандартному виду:

$$w'' - \frac{(c - a - b - 1) + (a + b + 1)x}{(1 - x)x}w' + \frac{ab}{x(1 - x)}w = 0.$$

Тогда одно из решений гипергеометрического уравнения – регулярное в окрестности  $z = 1$  – гипергеометрическая функция:

$$w_1 = F(a, b, a + b + 1 - c, 1 - z).$$

Второе решение вычисляется также, как и  $G(z)$  оно имеет вид:

$$w_2 = (1 - z)^{c-a-b}F(c - a, c - b, 1 + c - c - b, 1 - z).$$

Таким образом, функцию  $F(a, b, c, z)$  – решение гипергеометрического уравнения, можно аналитически продолжить за круг  $|z| = 1$  с помощью двух других линейно независимых решений, регулярных в круге  $|z - 1| = 1$ :

$$F(a, b, c, z) = AF(a, b, a + b + 1 - c, 1 - z) + B(1 - z)^{c-a-b}F(c - a, c - b, 1 + c - a - b, 1 - z). \quad (1.8)$$

Значение постоянной  $A$  можно определить, устремив в этой формуле  $z$  к нулю, значение постоянной  $B$  – устремив  $z$  к единице.

*Формулу (1.8) иногда называют формулой связи.*

#### 1.2.4 Задача

Получить формулы аналитического продолжения  $F(a, b, c, z)$  на всю комплексную плоскость и вычислить значения постоянных  $A, B$  во всех этих формулах.

#### 1.2.5 Литература

При подготовке лекции использовались учебники

- 1 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.
- 2 Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, Москва, Ленинград, 1963.
- 3 Ф.Клейн. Развитие математики в XIX столетии. М.: Наука, 1974

### 1.3 Регулярные особые точки дифференциального уравнения

*Классифицированы особые точки дифференциальных уравнений второго порядка.*

#### 1.3.1 Решение дифференциального уравнения в виде ряда

Уравнение второго порядка

$$y'' + a(z)y' + b(z)y = 0 \quad (1.9)$$

имеет аналитическое решение в окрестности точки  $z = z_0$ , если коэффициенты уравнения – голоморфные функции в окрестности этой точки. Более того, легко построить сходящийся ряд для решения этого уравнения в окрестности точки  $z_0$ . Напомним процедуру построения этого ряда. Для простоты будем считать, что  $z_0 = 0$ . Функции  $a(z)$  и  $b(z)$  удобно представить в виде их рядов Тейлора:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \quad (1.10)$$

Решение уравнения также будем искать в виде ряда

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n. \quad (1.11)$$

Подставим формулы (1.10) и (1.11) в дифференциальное уравнение. Предположим, что ряд (1.11) можно почленно дифференцировать. После дифференцирования получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)y_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} n y_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = 0.$$

Объединим коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , в результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ (n+2)(n+1)y_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_{n-k}(k+1)y_{k+1} + \sum_{k=0}^n b_{n-k}y_k \right] = 0.$$

Для решения этого уравнения надо приравнять к нулю выражение в квадратных скобках. Тогда для определения коэффициентов  $y_n$  получится рекуррентная последовательность линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2y_2 + a_0y_1 + b_0y_0 &= 0, \\ 6y_3 + 2a_0y_2 + a_1y_1 + b_0y_1 + b_1y_0 &= 0, \\ &\dots, \\ (n+1)(n+2)y_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_{n-k}(k+1)y_{k+1} + \sum_{k=0}^n b_{n-k}y_k &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Решение этой рекуррентной системы уравнений содержит две произвольные постоянные. В качестве таковых можно выбрать, например,  $y_0$  и  $y_1$ .

Эти постоянные легко определить, если заданы условия Коши в точке  $z = 0$ . В результате:

$$y_2 = -\frac{1}{2}(a_0y_1 + b_0y_0), \quad y_3 = -\frac{1}{6}(2a_2y_2 + a_1y_1 + b_0y_1 + b_1y_0), \quad \dots$$

Можно показать, что полученный таким образом ряд для функции  $y(z)$  сходится, и функция  $y(z)$  является голоморфной в некоторой окрестности  $z = 0$ .

**Замечание.** Такой метод доказательства существования решения дифференциального уравнения называется методом Коши. Конечно, метод построения решения дифференциального уравнения в виде ряда был известен и до Коши. Коши исследовал вопрос о сходимости таких рядов.

### 1.3.2 Классификация особых точек дифференциального уравнения

Важным свойством, обеспечившим возможность построения решения уравнения (1.9) в виде ряда по целым степеням  $z$ , оказалась гладкость коэффициентов уравнения. Теперь кажется естественным вопрос, как построить решение в окрестности точки, где коэффициенты не голоморфны. Для этого рассмотрим уравнения вида:

$$y'' + f(z)y' + g(z)y = 0. \quad (1.12)$$

Здесь  $z^s f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$  и  $z^t g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$  – голоморфные функции,  $t, s$  – натуральные числа. Коэффициенты уравнения (1.12) имеют полюсы порядка  $t$  и  $s$  соответственно.

Исходя из опыта построения голоморфного решения для уравнения с голоморфными коэффициентами, можно понять, что в классе голоморфных функций уравнение решить, вообще говоря, не удастся. Поэтому приходится расширять класс решений. Будем искать решения, допускающие при  $z = 0$  точку ветвления конечного порядка. Тогда решение можно представить в виде:

$$y = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Здесь пока ряд будем понимать как формальный, то есть будем производить над ним действия, не заботясь о сходимости ни самого ряда, ни ряда, полученного почленным дифференцированием.

Подставим выражение для  $y(z)$  в уравнение (1.12):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1)u_n z^{\alpha+n-2} + \sum_{n=-s}^{\infty} z^n f_n \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)u_n z^{\alpha+n-1} + \sum_{n=-t}^{\infty} g_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+\alpha} = 0.$$

Из этой формулы можно усмотреть, что построение ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  можно устроить, если потребовать, чтобы разложение начиналось со степени  $z^{-2}$ . Для этого надо еще ограничить значения  $s \leq 1$  и  $t \leq 2$ .

Особые точки уравнения (1.12), в которых коэффициенты уравнения можно представить в виде

$$zf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad z^2 g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

называются *регулярными особыми точками*. Остальные особые точки — *иррегулярные особые точки*.

Пусть  $s = 1$ ,  $t = 2$ , тогда уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (\alpha + n)(\alpha + n - 1)u_n + (\alpha + n)f_0 u_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k} u_k + g_0 u_n + \sum_{k=0}^{n-2} g_{n-k} u_k \right] z^{\alpha+n-2} = 0.$$

Значение  $\alpha$  определяется из уравнения при  $z^{\alpha-2}$ :

$$\alpha(\alpha - 1) + f_0 \alpha + g_0 = 0. \quad (1.13)$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением*. Решения определяющего уравнения  $(\alpha_1, \alpha_2)$  называются *показателями особой точки*.

Дальше легко написать рекуррентную систему уравнений для определения коэффициентов ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ :

$$[(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + \alpha f_0 + g_0]u_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [f_{n-k}(\alpha + k) + g_{n-k}]u_k.$$

Докажем, что построенный ряд сходится (см. Ф.Олвер, стр.148). Пусть ряды для  $zf(z)$  и  $z^2 g(z)$  сходятся в круге радиуса  $r$ . Обозначим  $\rho < r$ , пусть

$$K > \max_{|z|=\rho} |zf(z)|, \quad K > \max_{|z|=\rho} |z^2 g(z)|.$$



Тогда из интегральной формулы Коши следует:

$$|f_n| \leq K\rho^{-n}, \quad |g_n| \geq K\rho^{-n}.$$

Обозначим  $s \equiv [|\alpha_1 - \alpha_2|]$  (здесь квадратные скобки означают целую часть). Обозначим  $b_n = |u_n|$ , при  $n = 0, 1, \dots, s$ . При  $n > s$ :

$$n(n - |\alpha_1 - \alpha_2|)b_n = K \sum_{j=0}^{n-1} (|\alpha_1| + j + 1)b_j\rho^{j-n}. \quad (1.14)$$

Можно показать, что  $|a_n| \leq b_n$ . Если в (1.14) заменить  $n$  на  $n - 1$  и вычесть полученное уравнение из (1.14), можно получить уравнение для мажорирующих коэффициентов  $b_n$ :

$$\rho n(n - |\alpha_1 - \alpha_2|)b_n - (n-1)(n-1 - |\alpha_1 - \alpha_2|)b_{n-1} = K(|\alpha_1| + n)b_{n-1}, \quad n \geq s+2.$$

Разделим обе части на  $n^2b_n$ , при  $s \rightarrow \infty$  получим:

$$b_{n-1}/b_n \rightarrow \rho.$$

Это означает, что радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ , а с ним и ряда для решения уравнения (1.12), равен  $\rho$ . Так как  $\rho$  можно взять сколь угодно близко к  $r$ , то и ряд для  $u(z)$  сходится внутри круга радиуса  $r$ .

**Замечание.** Могут возникнуть трудности при построении этим методом двух линейно независимых решений уравнения в регулярной особой точке, если  $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbf{Z}$ . В этом случае второе решение можно построить с помощью известного приема – используя формулу для вронскиана двух линейно независимых решений уравнения второго порядка.

### 1.3.3 Показатели особых точек гипергеометрического уравнения

Рассмотрим гипергеометрическое уравнение:

$$w'' + \frac{((a+b+1)z-c)}{z(z-1)}w' + \frac{ab}{z(z-1)}w = 0.$$

Особые точки этого уравнения  $z = 0$ ,  $z = 1$  и  $z = \infty$ . В частности в окрестности бесконечно удаленной особой точки  $z = 1/t$  и уравнение имеет вид:

$$w'' + \left( \frac{a+b+1-ct}{t(t-1)} + \frac{2}{t} \right) w' + \frac{ab}{t^2(1-t)} w = 0.$$

Вычислим показатели этих особых точек. В окрестности особой точки  $z = 0$  определяющее уравнение:

$$\alpha(\alpha - 1) + c\alpha = 0.$$

Решения этого определяющего уравнения:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1 - c$ .

Определяющее уравнение в точке  $z = 1$  имеет вид:

$$\alpha(\alpha - 1) + (a + b + 1 - c)\alpha = 0,$$

его решения  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = c - a - b$ .

Для того, чтобы написать определяющее уравнение в точке  $z = \infty$ , надо переписать уравнение относительно новой переменной. Определяющее уравнение:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha(2 - a - b - 1) + ab = 0,$$

или

$$\alpha^2 - \alpha(a + b) + ab = 0.$$

Его решения  $\alpha_1 = a$ ,  $\alpha_2 = b$ .

Итак, гипергеометрическое уравнение в регулярных особых точках  $z = 0$ ,  $z = 1$  и  $z = \infty$  имеет показатели  $(0, 1 - c)$ ,  $(0, c - a - b)$ ,  $(a, b)$ .

### 1.3.4 Задача

Построить и исследовать второе решение уравнения в окрестности регулярной особой точки, если  $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbf{N}$ .

### 1.3.5 Литература

При подготовке лекции использовались учебники

- 1 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.
- 2 Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, Москва, Ленинград, 1963.
- 3 Ф.Клейн. Развитие математики в XIX столетии. М.: Наука, 1974

## 1.4 Функция Эйри

*Приведено специальное решение уравнения Эйри – функция Эйри. Показано, что функция Эйри целая. Получена асимптотика функции Эйри при больших значениях аргумента.*

### 1.4.1 Уравнение Эйри

Уравнение

$$u'' - zu = 0 \quad (1.15)$$

называется уравнением Эйри. Решения этого уравнения обладают интересным свойством – они колеблются при  $z < 0$  и экспоненциально растут или убывают при  $z > 0$ . Это можно понять, если вместо переменной  $z$  рассматривать уравнение с фиксированным параметром при  $u$ . Действительно, решения уравнения

$$v'' - Zv = 0, \quad Z = \text{const}, \quad (1.16)$$

существенно зависят от знака параметра  $Z$ . При  $Z < 0$  решения этого уравнения осциллируют с частотой  $\sqrt{-Z}$ . При  $Z > 0$  решения уравнения (1.16) имеет пара линейно независимых решений – одно из них экспоненциально растет, другое экспоненциально убывает. Естественно ожидать такое же поведение решения уравнения Эйри на интервалах  $z < 0$  и  $z > 0$  соответственно.

Уравнение Эйри часто используется как модель для математического описания перехода из зоны света в зону тени в волновой оптике и в других задачах, где решение меняется от осциллирующего к экспоненциальному.

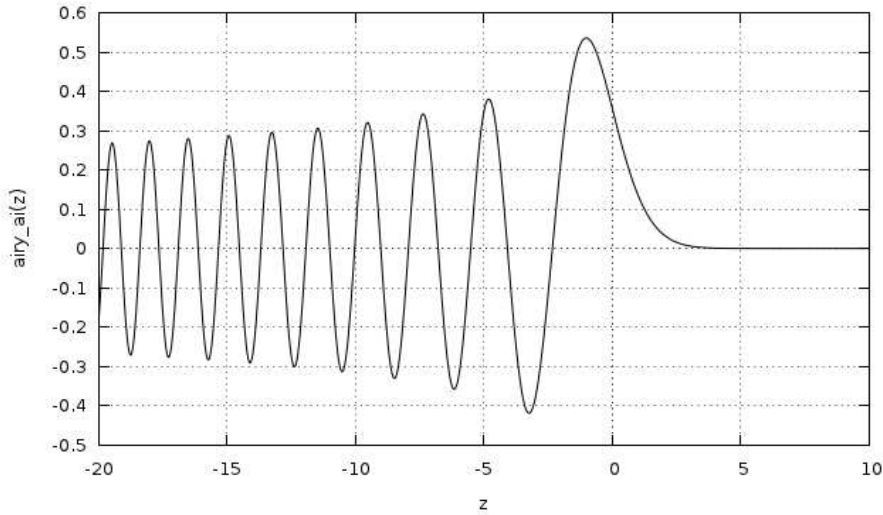


Рис. 1.2: График специального решения уравнения (1.15) – функции Эйри.

Уравнение Эйри имеет единственную существенную особую точку на расширенной комплексной плоскости  $z = \infty$ . Действительно, сделаем замену переменной  $z = 1/t$ . При такой замене переменной первая производная по  $z$  принимает вид:

$$\frac{d}{dz} = \frac{dt}{dz} \frac{d}{dt} = \frac{-1}{z^2} \frac{d}{dt} = -t^2 \frac{d}{dt}.$$

Тогда в терминах переменной  $t$  уравнение Эйри примет вид:

$$t^4 u'' + 2t^3 u' - \frac{1}{t} u = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно второй производной, получим:

$$u'' + \frac{2}{t} u' - \frac{1}{t^5} u = 0.$$

### 1.4.2 Решение в виде ряда

Решение уравнения Эйри легко построить в виде сходящегося ряда по степеням параметра  $z$ .

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Подстановка этого ряда в уравнение дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)u_{n+2} - u_{n-1})z^n = 0, \quad u_{-1} = 0.$$

Чтобы сумма равнялась нулю при любом  $z$ , необходимо и достаточно приравнять к нулю коэффициенты при линейно независимых функциях – степенях  $z$ . В результате получается рекуррентная система для коэффициентов:

$$u_{n+3} = \frac{u_n}{(n+3)(n+2)}. \quad (1.17)$$

Из этой формулы нетрудно видеть, что степенной ряд для решения уравнения Эйри абсолютно сходится при любом  $z$ . То есть, решение – целая функция.

Формула для общего члена ряда легко получается из рекуррентной системы (1.17):

$$u_{3n} = u_0 \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)}{(3n)!},$$

$$u_{3n+1} = u_1 \frac{2 \times 5 \times \dots \times (3n-1)}{(3n+1)!}.$$

$$u_{3n+2} = 0.$$

Из этих формул следует, что коэффициенты  $u_{3n}$  зависят только от  $u_0$ , коэффициенты  $u_{3n+1}$  – только от  $u_1$ . Следовательно, решение уравнения Эйри зависит от двух произвольных постоянных и может быть записано в виде:

$$u(z) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)}{(3n)!} \right) z^{3n} + \quad (1.18)$$

$$+ u_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2 \times 5 \times \dots \times (3n-1)}{(3n+1)!} z^{3n+1} \right). \quad (1.19)$$

Эта формула содержит две произвольные постоянные  $u_0$  и  $u_1$ . Поэтому функция  $u(z)$  – общее решение уравнения Эйри.

### 1.4.3 Интегральное представление общего решения уравнения Эйри

Решение уравнения Эйри можно выразить с помощью интегрального представления – интеграла типа Лапласа. Для вывода интегральной формулы рассмотрим интеграл:

$$u(z) = \int_{\gamma} \tilde{u}(p) \exp(pz) dp.$$

Здесь  $\gamma$  – контур интегрирования. Заранее этот контур неизвестен. Его выбор обусловлен двумя требованиями. Во-первых, – интеграл должен сходиться, во-вторых – он не должен быть тождественно равным нулю. Контур определяется после получения явного вида образа Лапласа функции  $u(z)$ . Уравнение для образа можно получить, подставив формулу для  $u(z)$  в уравнение Эйри. При этом предполагается, что дифференцировать можно под знаком интеграла:

$$\int_{\gamma} p^2 \tilde{u} \exp(pz) dp - z \int_{\gamma} \tilde{u} \exp(pz) dp = 0.$$

Произведение

$$z \int_{\gamma} \tilde{u} \exp(pz) dp$$

удобно переписать, избавившись от множителя  $z$  интегрированием по частям:

$$z \int_{\gamma} \tilde{u} \exp(pz) dp = \tilde{u} \exp(pz) \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} - \int_{\gamma} \tilde{u}' \exp(pz) dp.$$

Здесь  $\gamma_{\pm}$  – начальная и конечная точки кривой интегрирования. Будем полагать, что сумма внеинтегральных слагаемых равна нулю. Это может быть либо в случае, если контур интегрирования замкнут, либо, если в этих точках функция  $\tilde{u}(p) \exp(pz)$  равна нулю. В результате получим:

$$\int_{\gamma} (p^2 \tilde{u} + \tilde{u}') \exp(pz) dp = 0.$$

Чтобы интеграл равнялся нулю достаточно, чтобы нулю равнялось выражение в скобках. Следовательно,

$$p^2 \tilde{u} + \tilde{u}' = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Оно легко интегрируется:

$$\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = -p^2 dp.$$

или

$$\tilde{u} = C \exp(-p^3/3).$$

Окончательно получается интегральное выражение:

$$u(z) = C \int_{\gamma} \exp(pz - p^3/3) dp.$$

Явный вид подынтегральной функции получен. Следующий шаг – выбор контура интегрирования. Подынтегральная функция голоморфна в комплексной плоскости. Тогда из теоремы Коши следует, что интеграл по замкнутому контуру в конечной области комплексной плоскости  $p$  тождественно равен нулю. Поэтому, чтобы получить нетривиальное решение уравнения Эйри рассмотрим контур интегрирования, проходящий через бесконечно удаленную точку. Для сходимости интеграла важным оказывается направление, по которому контур интегрирования уходит в бесконечность.

Интеграл сходится, если при  $p \rightarrow \infty \operatorname{Re}(p^3) < 0$ . Это означает, что ветви контура интегрирования должны уходить в бесконечность внутри секторов  $-\pi/6 < \arg(p) < \pi/6$ ,  $\pi/2 < \arg(p) < 5\pi/6$ ,  $7\pi/6 < \arg(p) < 10\pi/6$ . Если обе ветви контура интегрирования уходят в бесконечность в одном и том же секторе, тогда на расширенной комплексной области контур

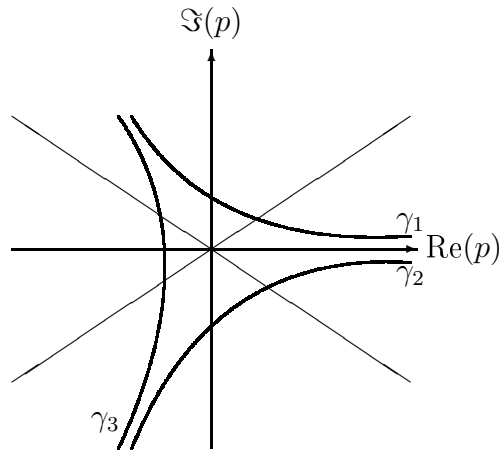


Рис. 1.3: Кривые  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – пути интегрирования, приводящие к нетривиальным интегралам Лапласа.

интегрирования можно стянуть в точку, и по теореме Коши интеграл равен нулю. Таким образом, для представления решения уравнения Эйри интересны контуры уходящие в бесконечность по направлениям из двух различных секторов.

Рассмотрим интеграл, по контуру  $\gamma_3$ . Этот контур топологически эквивалентен интегралу по мнимой оси. Тогда

$$u(z) = C \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(pz - p^3/3) dp.$$

Замена переменной интегрирования  $p = ik$  дает:

$$u(z) = iC \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(kz + k^3/3)) dk.$$

Мнимая часть подынтегральной функции  $-\sin(kz + k^3/3)$  – нечётна по  $k$ , поэтому интеграл от нее равен нулю. Вещественная часть подынтегральной функции  $-\cos(kz + k^3/3)$  – четна по  $k$ . Поэтому

$$u(z) = 2iC \int_0^{\infty} \cos(kz + k^3/3) dk.$$

Покажем, что этот интеграл сходится. Представим его в виде суммы интегралов:

$$u(z) = 2iC \int_0^{\sqrt{|z|+1}} \cos(kz + k^3/3) dk + 2iC \int_{\sqrt{|z|+1}}^{\infty} \cos(kz + k^3/3) dk.$$

Первый интеграл в этой формуле ограничен для  $z \in \mathbb{R}$  и  $z \neq 0$ . Рассмотрим второй интеграл.

$$I(z) = 2iC \int_{\sqrt{|z|+1}}^{\infty} \cos(kz + k^3/3) dk.$$

Проинтегрируем его по частям:

$$\begin{aligned} I(z) &= 2iC \int_{\sqrt{|z|+1}}^{\infty} \cos(kz + k^3/3) dk = 2iC \frac{\cos(kz + k^3/3)}{z + k^2} \Big|_{k=\sqrt{|z|+1}}^{k=\infty} + \\ &+ 2iC \int_{\sqrt{|z|+1}}^{\infty} \frac{2k}{(z + k^2)^2} \sin(kz + k^3/3) dk. \end{aligned}$$

Здесь последний интеграл сходится абсолютно, внеинтегральное слагаемое при  $k = \infty$  равно нулю, следовательно, интеграл  $I(z)$  ограничен. Это дает ограниченность интеграла  $u(z)$ .

Выберем  $C = 1/2i\pi$ . Функция

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kz + k^3/3) dk$$

называется функцией Эйри.

Эта функция является решением задачи Коши для уравнения Эйри с начальными условиями:

$$u(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(k^3/3) dk, \quad u'(0) = 0.$$

Значение функции Эйри при  $z = 0$  можно выразить через гамма-функцию. Действительно:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(k^3/3) dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(ik^3/3)) dk.$$

Обозначим  $k^3/3 = t$ , тогда  $k^2 dk = dt$  или  $dk = dt/(3t)^{2/3}$ , тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik^3/3) dk = \frac{1}{2\pi 3^{2/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(it)}{t^{2/3}} dt$$

Теперь интеграл по  $t$  можно представить как интеграл по мнимой оси:  $\tau = it$ , тогда:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi 3^{2/3}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(-\tau)}{(i\tau)^{2/3}} d(i\tau) = \frac{i}{\pi(3i)^{2/3}} \int_0^{i\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\tau^{2/3}} d\tau$$



или

$$u(0) = \frac{-1}{\pi(3)^{2/3}} \int_0^{i\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\tau^{2/3}} d\tau = \frac{-1}{\pi(3)^{2/3}} \Gamma(1/3).$$

Еще одно, линейно независимое к  $Ai(z)$  решение уравнения Эйри получается из интеграла по контуру  $\gamma_2$ .

$$Bi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \exp(pz + p^3/3) dp.$$

#### 1.4.4 Представление функции Эйри в виде ряда

Из начальных условий для функции Эйри и формулы для общего решения уравнения получается представление:

$$Ai(z) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n-2)}{(3n)!} \right) z^{3n},$$

где

$$u_0 = \frac{-1}{\pi(3)^{2/3}} \Gamma(1/3).$$

#### 1.4.5 Задача

Выяснить тип особой точки  $z = \infty$  для уравнения Эйри.

#### 1.4.6 Литература

- 1 М.В. Федорюк, Асимптотика. Интегралы, ряды. М.: Наука, 1978.
- 2 В.М. Бабич, В.С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.

### 1.5 Функции параболического цилиндра

*Приведено уравнение параболического цилиндра. Построен ряд Тейлора для решений уравнения параболического цилиндра. Выведено интегральное представление для функций параболического цилиндра. Выведены формулы связи функций параболического цилиндра с разными значениями параметра.*

### 1.5.1 Уравнение параболического цилиндра

Каноническая форма уравнения параболического цилиндра

$$y'' - \left(\frac{x^2}{4} + a\right)y = 0. \quad (1.20)$$

Здесь  $x$  – независимая переменная,  $a$  – параметр. Если рассмотреть это уравнение при больших значениях  $x$ , затем "заморозить" коэффициент  $x \rightarrow X = \text{const}$ , то нетрудно сообразить, что это уравнение имеет пару решений, одно из которых убывает по  $x$ , другое – растет при больших вещественных  $x$ .

Часто возникает уравнение параболического цилиндра в другой форме:

$$y'' + \left(\frac{x^2}{4} - a\right)y = 0.$$

Решения этого уравнения при больших вещественных значениях  $x$  осциллируют. Уравнение в первой форме переходит в уравнение во второй форме заменой:

$$x \rightarrow x \exp(i\pi/4), \quad a \rightarrow -ia.$$

Ниже будут исследоваться решения уравнения параболического цилиндра в первой форме. К решениям уравнения во второй форме можно

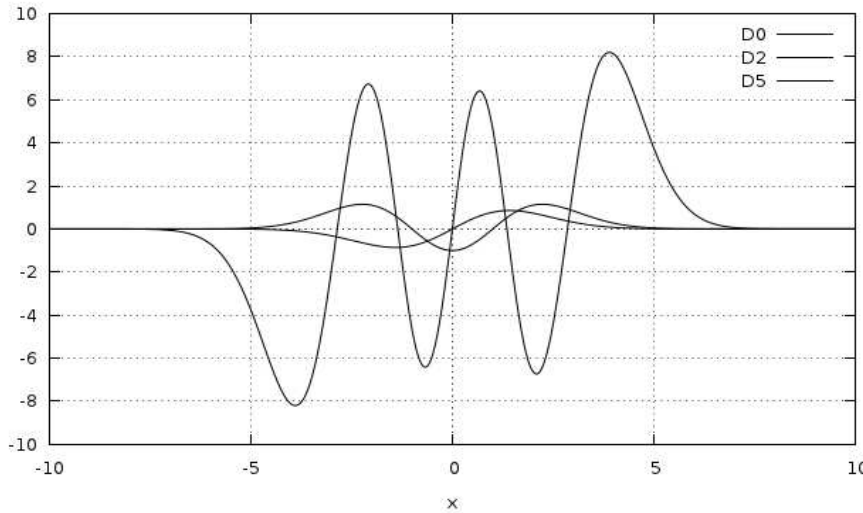


Рис. 1.4: Графики функций параболического цилиндра– решений уравнения 1.20. Со значениями  $-a - 1/2 = 0$ ,  $-a - 1/2 = 2$ ,  $-a - 1/2 = 5$  соответственно. Число наблюдаемых осцилляций возрастает в соответствии с возрастанием параметра  $-a - 1/2$ .

перейти, воспользовавшись приведенной заменой.

Дифференциальное уравнение параболического цилиндра изначально было выведено с помощью метода разделения переменных при переходе к системе координат, связанной с цилиндром в основании которого парабола. Оказалось, что уравнение параболического цилиндра играет важную роль в квантовой механике, теории колебаний и при исследовании уравнений Пенлеве.

### 1.5.2 Ряд Тейлора для решений

Точка  $x = 0$  регулярная точка уравнения. Следовательно, в её окрестности существует представление решения в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

Подставим эту формулу в дифференциальное уравнение и приравняем коэффициента при одинаковых степенях  $x$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( (n+2)(n+1)y_{n+2} - \frac{1}{4}y_{n-2} - ay_n \right) x^n = 0.$$

Тогда коэффициенты ряда Тейлора связаны соотношением:

$$y_{n+4} = \frac{y_n + 4ay_{n+2}}{4(n+4)(n+3)}.$$

Это соотношение показывает, что коэффициенты при чётных и нечётных степенях  $x$  независимы друг от друга. Следовательно, можно построить ряды для двух линейно независимых решений – чётного, ряд Тейлора которого начинается с  $y_0 = 1$ , и нечётного – ряд Тейлора которого начинается с  $y_1 = 1$ . Обозначим соответствующие решения  $Y_1$  и  $Y_2$ :

$$Y_1 = 1 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{1+2a^2}{4 \times 4 \times 3}x^4 + \dots$$

$$Y_2 = x + \frac{a}{3 \times 2}x^3 + \frac{1+\frac{2}{3}a^2}{4 \times 5 \times 4}x^5 + \dots$$

### 1.5.3 Интегральное представление

Для вывода интегрального представления решения уравнения параболического цилиндра удобно воспользоваться заменой искомой функции:

$$y = \exp(-x^2/4)u.$$

Подстановка этой формулы в уравнение приводит к уравнению для функции  $u$ :

$$u'' - xu' - \left(\frac{1}{2} + a\right)u = 0$$

Это уравнение удобнее исходного тем, что в него независимая переменная входит только в первом порядке. Следовательно, после преобразования Лапласа для образов будет получено уравнение первого порядка по сопряженной переменной, которое можно явно проинтегрировать.

Будем искать решение уравнения для  $u$  в виде:

$$u(x) = \int_{\gamma} \exp(kx) \tilde{u}(k) dk.$$

В этой формуле неизвестен образ Лапласа  $\tilde{u}(k)$  и контур интегрирования в комплексной области по параметру  $k$ .

Ниже будут приведены формальные выкладки, в которых считается, что все операции можно выполнить. Далее, после того как будет получен ответ для образа Лапласа  $\tilde{u}$  и будет найден контур интегрирования  $\gamma$ , можно будет проверить справедливость сделанных выкладок.

Действуя формально, вычислим формулы для первой и второй производных по  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \int_{\gamma} \exp(kx) \tilde{u}(k) dk = \int_{\gamma} k \exp(kx) \tilde{u}(k) dk.$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{\gamma} \exp(kx) \tilde{u}(k) dk = \int_{\gamma} k^2 \exp(kx) \tilde{u}(k) dk.$$

Подставим эти формулы для производных в уравнение и занесем все слагаемые под знак интеграла:

$$\int_{\gamma} \left( k^2 \tilde{u}(k) - xk \tilde{u}(k) - \left(\frac{1}{2} + a\right) \tilde{u}(k) \right) \exp(kx) dk = 0.$$

В подынтегральном выражении в круглых скобках все слагаемые кроме  $-xk\tilde{u}(k)$  зависят только от  $k$  переменной интегрирования  $k$ . Преобразуем интеграл от этого слагаемого по частям так, чтобы избавиться от переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma} (xk\tilde{u}(k)) \exp(kx) dk &= -k\tilde{u}(k) \exp(kx) \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} + \\ &- \int_{\gamma} (\tilde{u}(k) + k\tilde{u}'(k)) \exp(kx) dk. \end{aligned}$$

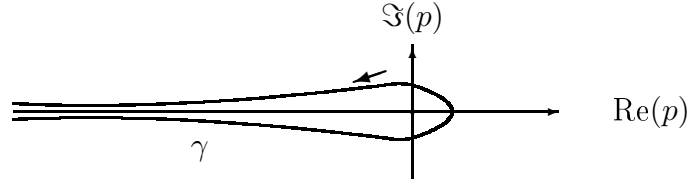


Рис. 1.5: Интегрирование по петле  $\gamma$ . Путь интегрирования обходит точку ветвления  $z = 0$  и проходит под и над разрезом  $\text{Re}(z) < 0$  соединяющим точку ветвления  $k = 0$  и бесконечно удаленную точку.

Здесь  $\gamma_{\pm}$  – начальная и конечная точки контура  $\gamma$ . Предположим, что контур  $\gamma$  таков, что сумма внеинтегральных слагаемых равна нулю. Тогда получим:

$$\int_{\gamma} \left( k^2 \tilde{u}(k) + \tilde{u}(k) + k \tilde{u}'(k) - \left( \frac{1}{2} + a \right) \tilde{u}(k) \right) \exp(kx) dk = 0.$$

Для того, чтобы интеграл равнялся нулю достаточно, чтобы подынтегральное выражение равнялось нулю. Это условие приводит к дифференциальному уравнению:

$$k^2 \tilde{u}(k) + k \tilde{u}'(k) + \left( \frac{1}{2} - a \right) \tilde{u}(k) = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\int \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = \int \frac{-k^2 + (a - \frac{1}{2})}{k} dk$$

или

$$\tilde{u} = C \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2}.$$

Следовательно, решение можно представить в виде:

$$y = C \exp(-x^2/4) \int_{\gamma} \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} dk.$$

Следующий шаг – выбор контура интегрирования. Подынтегральная функция при  $a < 1/2$  имеет особую точку  $x = 0$ . Определим область, в которой показатель экспоненты имеет отрицательную вещественную часть. Пусть  $k = \xi + i\lambda$ , тогда  $\text{Re}(-k^2) = \lambda^2 - \xi^2$ . Следовательно  $\text{Re}(-k^2) < 0$  при  $\lambda^2 < \xi^2$ . Следовательно, любой контур включающий бесконечно удаленную точку комплексной плоскости, выходящий из нее в сектор  $5\pi/4 < \arg(k) < 3\pi/4$  и уходящий в бесконечность в секторе  $-\pi/4 < \arg(k) < \pi/4$ , который не проходит через точку  $k =$ , можно

принять за контур  $\gamma$ . Воспользовавшись теоремой Коши получим, что такие контуры эквивалентны друг другу с точностью до петли вокруг точки  $k = 0$ , проходящей от  $-\infty$  под осью  $\Im(k) = 0$  и уходящей над осью  $\Re(k) = 0$ .

Будем в качестве контура  $\gamma$  обозначать указанную на рисунке 1.5 петлю. Следуя стандартным обозначениям, определим функцию параболического цилиндра:

$$U(a, x) = D_{-a-1/2}(x) = \frac{\Gamma(1/2 - a)}{2\pi i} \exp(-x^2/4) \int_{\gamma} \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} dk.$$

При  $a = -n + 1/2, n \in \mathbf{N}$  точка  $x = 0$  – полюс  $n + 1$ -го порядка. Следовательно:

$$\begin{aligned} U(1/2 - n, x) &= n! \exp(-x^2/4) \int_{\gamma} \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} dk = \\ &= n! \exp(x^2/4) \int_{\gamma} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} dk = \\ &= n! \exp(x^2/4) \operatorname{res}_{x=0} \left( \exp\left(-\frac{1}{2}(x-k)^2\right) k^{-n} \right) = \\ &= (-1)^n \exp(x^2/4) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2). \end{aligned}$$

#### 1.5.4 Формулы связи при различных параметрах

Из теоремы Коши следует, что интеграл по такой петле тождественно равен нулю при  $(a + 1/2) \in \mathbf{N}$ , однако, здесь же и  $\Gamma(1/2 - a)$  имеет полюс первого порядка. Так что при этих значениях параметра необходимо дополнительное исследование. Для этого оказываются полезными формулы связи функций параболического цилиндра для различных значениях параметра  $a$ .

Справедлива формула:

$$\int_{\gamma} \frac{d}{dk} \left( \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} \right) dk = 0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left( x \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} - k \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} + \right. \\ \left. + (a - 1/2) \exp\left(kx - \frac{k^2}{2}\right) k^{a-3/2} \right) dk = 0. \end{aligned}$$

Теперь представим интеграл от суммы в виде суммы интегралов и умножим на множитель  $\Gamma(1/2 - a) \exp(x^2/4)/(2\pi i)$ , в результате получим:

$$xU(a, x) - \frac{\Gamma(1/2 - a)}{\Gamma(1/2 - (a + 1))}U(a + 1, x) + \frac{(a - 1/2)\Gamma(1/2 - a)}{\Gamma(1/2 - (a - 1))}U(a - 1, x) = 0.$$

Воспользовавшись свойством гамма-функции, получим:

$$xU(a, x) - (1/2 - a)U(a + 1, x) - U(a - 1, x) = 0.$$

С помощью этой формулы можно вычислять значения функции параболического цилиндра при  $(a + 1/2) \in \mathbf{N}$ .

### 1.5.5 Значения в начале координат

Чтобы связать интегральную формулу для функции параболического цилиндра с её разложением Тейлора в окрестности  $x = 0$ , вычислим значение интеграла при  $a > -1/2$ . Для выбранных значений параметра  $a$  интеграл по петле можно представить как интеграл по малой окружности вокруг начала координат и интегралы по верхней и нижней сторонам разреза. При этом на верхней и нижней сторонах разреза оказывается разным аргумент переменной интегрирования.

$$\begin{aligned} U(a, 0) &= \frac{\Gamma(1/2 - a)}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) k^{a-1/2} dk = \\ &= \left| k = |k| \exp(i \arg(k)), |k| = \rho, \arg(k) = \pm i\pi \right| = \\ &= \frac{\Gamma(1/2 - a)}{2\pi i} 2i \sin(\pi(a - 1/2)) \int_0^{\infty} \exp(-\rho^2/2) \rho^{a-1/2} d\rho = \left| \rho^2/2 = \lambda \right| = \\ &= 2^{a/2-1/4} \frac{\Gamma(1/2 - a)}{\pi} \sin(\pi(a - 1/2)) \int_0^{\infty} \exp(-\lambda) \lambda^{a/2-3/4} d\lambda = \\ &= 2^{a/2-1/4} \frac{\Gamma(1/2 - a)}{\pi} \sin(\pi(a - 1/2)) \Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right) = 2^{a/2-1/4} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right)}; \end{aligned}$$

Такие же вычисления для производной дают:

$$\begin{aligned} U'(a, 0) &= \frac{\Gamma(1/2 - a)}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) k^{(a+1)-1/2} dk = \\ &= 2^{a/2+1/4} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

### 1.5.6 Литература

- 1 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции М.:Наука, 1990.
- 2 Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.
- 3 М.Абрамовиц, И.Стиган, Справочник по специальным функциям. М. Наука, 1979.

## 1.6 Интеграл Френеля и метод стационарной фазы

*Приведены формулы для косинус- и синус-интегралов Френеля. Показано, что интегралы Френеля являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка. Получены формулы для интегралов Френеля при больших значениях аргумента. Показано, что интегралы Френеля лежат в основе формул метода стационарной фазы.*

### 1.6.1 Формулы для интегралов Френеля

Косинус- и синус-интегралами Френеля называются функции:

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

Эти интегралы играют важную роль в математической физике. Область их использования – от теории дифракции до классической механики. На самом деле важность этих интегралов происходит из простоты формул их представляющих. Это общий принцип – чем проще формула, тем она важнее для приложений.

Интегралы Френеля могут быть представлены в виде рядов Тейлора. Для этого можно представить подынтегральные функции в виде рядов Тейлора и затем почленно проинтегрировать. В результате получаются выражения:

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)! 4n}, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)! (4n+3)}.$$

Полученные ряды сходятся при любом  $\forall x \in \mathbb{C}$ . Интегралы Френеля – целые нечетные функции.



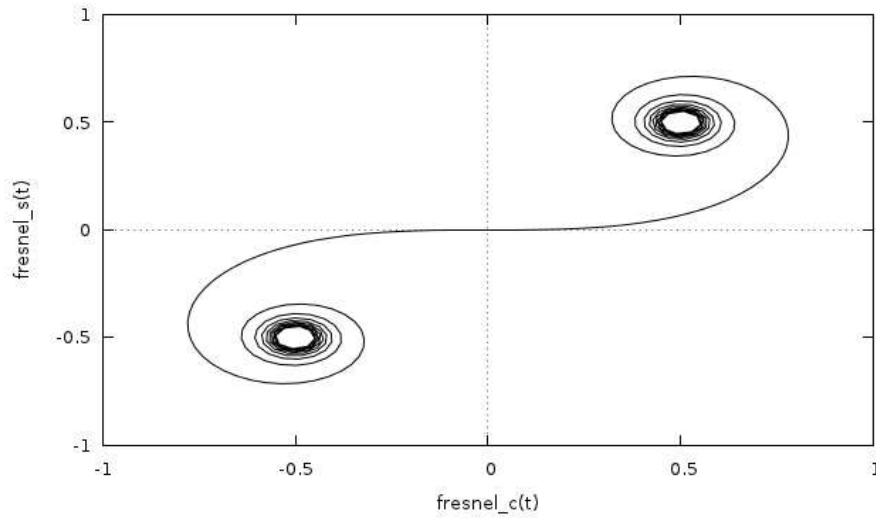


Рис. 1.6: Спираль Эйлера – параметрически заданная кривая  $(C(t), S(t))$ .

### 1.6.2 Поведение при больших значениях аргумента

Прежде всего рассмотрим свойства интегралов Френеля при больших вещественных значениях аргумента. Подынтегральная функция знакопеременна. Интеграл можно представить в виде суммы знакопеременного ряда площадей. Площади пропорциональны периоду подынтегральной функции. Период колебаний при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Соответственно члены знакопеременного ряда стремятся к нулю. Из признака сходимости Лиувилля ряд сходится, следовательно и интегралы  $C(x)$  и  $S(x)$  ограничены при  $x \rightarrow \infty$ .

Вычислим предел:

$$C = \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt.$$

Для этого сделаем замену:  $z = t^2$ , тогда

$$C = \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos(z)}{2\sqrt{z}} dz$$

Для дальнейших вычислений удобно представить  $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ . Эта формула позволяет представить интеграл в виде суммы интегралов с экспонентами по отдельности.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру  $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3$ . Здесь

$\gamma_2$  – четверть окружности радиуса  $R$ .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^R \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz + \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} \exp(iR \exp(i\phi)) \frac{\exp(i\phi/2)}{2} d\phi + \int_{iR}^0 \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz \right) = 0$$

Предел при  $R \rightarrow \infty$  для каждого интеграла из суммы существует, поэтому можно записать:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz = - \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} \exp(iR \exp(i\phi)) \frac{\exp(i\phi/2)}{2} d\phi - \int_{i\infty}^0 \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz.$$

В последнем интеграле сделаем замену:

$$\begin{aligned} - \int_{i\infty}^0 \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz &= \left| iz = -y \right| = \frac{i}{2\sqrt{-i}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{i}{2\sqrt{-i}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{2}}{4} (1+i) \Gamma(1/2); \end{aligned}$$

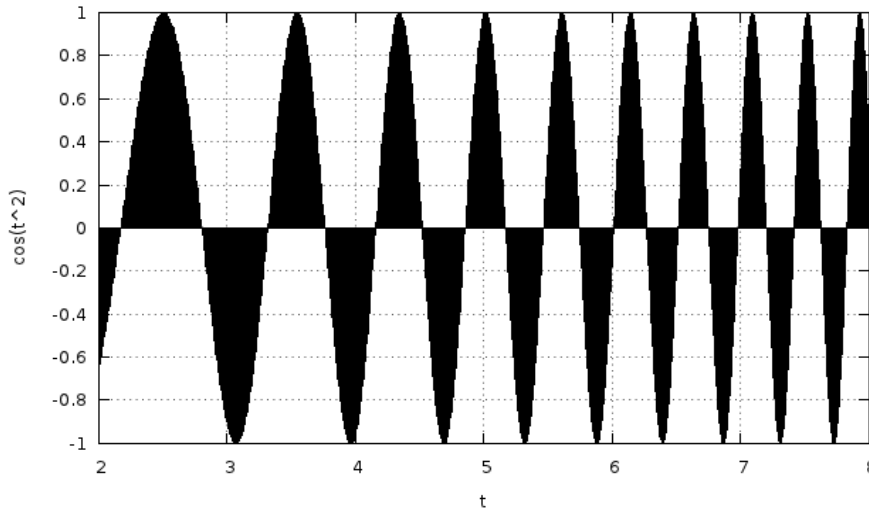


Рис. 1.7: Интеграл в определении косинус-интеграла Френеля можно представить в виде суммы знакопеременного ряда, члены которого – площади под функцией  $\cos(t^2)$ .

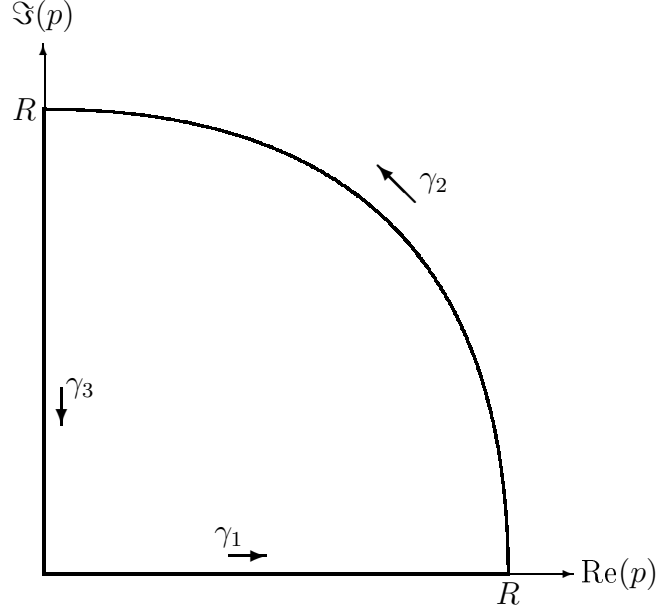


Рис. 1.8: Интеграл по контуру  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  равен нулю, так как подынтегральная функция голоморфна внутри  $\gamma$ .

Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} \exp(iR \exp(i\phi)) \frac{\exp(i\phi/2)}{2} d\phi = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{R}}{2} \int_0^{\pi/2} \exp(i(\phi/2 + R \cos(\phi))) \exp(-R \sin(\phi)) d\phi. \end{aligned}$$

Для  $\forall \phi \in (0, \pi/2]$  подынтегральная функция экспоненциально мала по  $R$  при  $R \rightarrow \infty$ . Покажем, что предел равен нулю. Для этого разобьём интеграл по  $\phi$  на сумму двух интегралов. Интеграл по  $\phi \in (0, R^{-3/4}]$  и по  $\phi \in (R^{-3/4}, \pi/2]$ . Поставим эти интегралы под знак предела. В результате очевидных оценок получим:

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} \exp(iR \exp(i\phi)) \frac{\exp(i\phi/2)}{2} d\phi \leq \\ & \leq \text{const} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{R}} + \text{const} \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \exp(-R \sin(1/\sqrt[4]{R^3})) = 0 \end{aligned}$$

В результате:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{iz}}{2\sqrt{z}} dz = \frac{\sqrt{2}}{4} (1+i)\Gamma(1/2).$$

С помощью таких же выкладок можно показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iz}}{2\sqrt{z}} dz = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)\Gamma(1/2).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1/2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2).$$

Формула произведения гамма-функций  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$  при  $z = 1/2$  дает  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 1.$$

Такие же вычисления дают формулу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 1.$$

### 1.6.3 Метод стационарной фазы

Здесь показано применение интегралов Френеля при исследовании интегралов типа Фурье от быстро осциллирующих функций. Рассмотрим интеграл:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx.$$

Будем считать, что на интервале  $[a, b]$   $f(x)$  – гладкая функция,  $\Omega(x)$  имеет единственную невырожденную стационарную точку  $x_s$ , то есть  $\Omega'(x_s) = 0$  и  $\Omega''(x_s) \neq 0$ .

Целью этого раздела будет изучение свойств  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . В качестве примера можно рассмотреть случай  $\Omega \equiv x^2$ ,  $f(x) \equiv 1/\cosh(x+1)$ . Приведенный график 1.6.3 показывает, что наибольший вклад в интеграл дает окрестность стационарной точки. Причина – меньшая частота осцилляций в окрестности стационарной точки.

Представим интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$F(\lambda) = \int_a^{x_s-\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx + \int_{x_s+\delta}^b f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx + \int_{x_s-\delta}^{x_s+\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx.$$

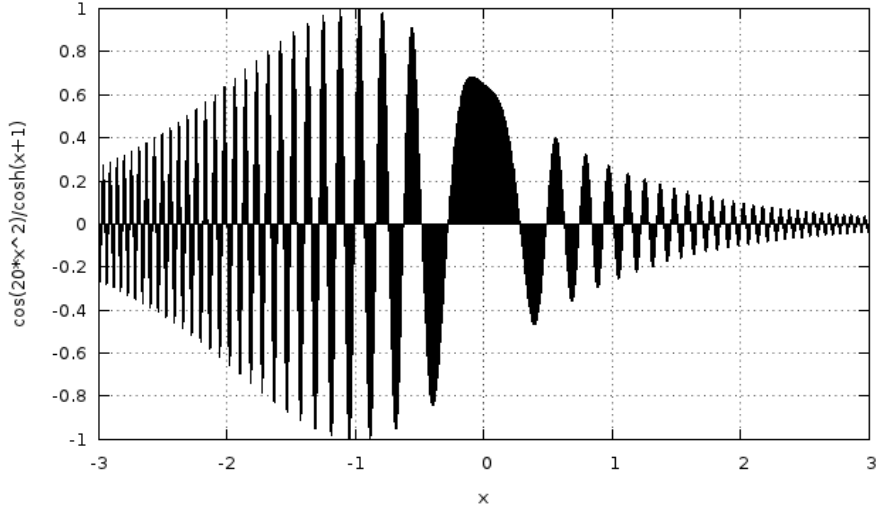


Рис. 1.9: Интеграл – знакопеременный ряд из площадей для подынтегральной функции  $\cos(20x^2)/\cosh(x+1)$ . Здесь  $\lambda = 20$ , стационарная точка  $x_s = 0$ . Нетрудно видеть, что основной вклад в интеграл дает окрестность стационарной точки, хотя максимум подынтегральной функции около  $x = -1$ .

Два первых интеграла не содержат стационарной точки функции  $\Omega(x)$ . Интегрируя по частям, можно оценить их порядок при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

$$\int_a^{x_s-\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx = \frac{f(x)}{\lambda\Omega'(x)} \sin(\lambda\Omega(x)) \Big|_{x=a}^{x=x_s-\delta} - \frac{1}{\lambda} \int_a^{x_s-\delta} \left( \frac{f(x)}{\Omega'(x)} \right)' \sin(\lambda\Omega(x)) dx$$

Внеинтегральное слагаемое в точке  $x = a$  имеет порядок  $\lambda^{-1}$ . Для оценки внеинтегрального слагаемого в точке  $x = x_s - \delta$  и оставшегося интеграла нужно вспомнить, что  $\Omega'(x_s) = 0$ . Поэтому порядок этого внеинтегрального слагаемого зависит от параметра  $\delta$  пока примем  $\delta = \lambda^{-\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ . Тогда

$$\int_a^{x_s-\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x)) dx = O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{\alpha-1}) + O(\lambda^{2\alpha-1}).$$

Так же оценивается интеграл по интервалу  $x \in [x_s + \delta, b]$ .

Теперь рассмотрим интеграл по малому интервалу в окрестности стационарной точки. Сделаем в нем замену переменной  $\lambda\Omega''(x_s)(x - x_s)^2 = \text{sgn}(\Omega''(x_s))y^2$ . Для определенности примем  $\text{sgn}(\Omega''(x_s)) = 1$ . Тогда  $dy =$

$\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|}dx$ . Представим подынтегральные функции по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$\int_{x_s-\delta}^{x_s+\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x))dx = \int_{-\frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{|\Omega''(x_s)|}}^{\frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{|\Omega''(x_s)|}} \left( f(x_s) + \frac{f'(\theta_f)}{\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|}} \right) \times \\ \times \cos \left( \lambda\Omega(x_s) + y^2 + \frac{y^3}{\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|^3}}\Omega'''(\theta_\Omega) \right) \frac{dy}{\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|}}.$$

Здесь  $\theta_f$  и  $\theta_\Omega$  некоторые параметры из  $[x_s - \delta, x_s + \delta]$ . Прямые оценки дают:

$$\int_{x_s-\delta}^{x_s+\delta} f(x) \cos(\lambda\Omega(x))dx = \\ = \int_{-\frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{|\Omega''(x_s)|}}^{\frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{|\Omega''(x_s)|}} f(x_s) \cos(\lambda\Omega(x_s) + y^2) \frac{dy}{\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|}} + \\ + O(\lambda^{-1/2-\alpha}).$$

Примем  $\alpha = 1/8$  тогда:

$$F(\lambda) \sim \frac{f(x_s)}{\sqrt{\lambda|\Omega''(x_s)|}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\Omega(x_s) + y^2)dy.$$

или

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda\Omega(x))dx \sim \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(x_s)|}} (\cos(\lambda\Omega(x_s)) - \sin(\lambda\Omega(x_s))),$$

при  $\text{sgn}(\Omega''(x_s)) = 1$ .

В случае  $\text{sgn}(\Omega''(x_s)) = -1$ , действуя так же, получим:

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda\Omega(x))dx \sim \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(x_s)|}} (\cos(\lambda\Omega(x_s)) + \sin(\lambda\Omega(x_s))).$$

Формулы для интеграла с функцией синус, вместо косинуса, легко получить с помощью формул приведения. Еще две формулы для интегралов с осциллирующей экспонентой:

$$\int_a^b f(x) \exp(i\lambda\Omega(x))dx \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(x_s)|}} \exp(i\lambda\Omega(x_s) + i\pi/4),$$

при  $\text{sgn}(\Omega''(x_s)) = 1$ .

В случае  $\text{sgn}(\Omega''(x_s)) = -1$ , действуя так же, получим:

$$\int_a^b f(x) \exp(i\lambda\Omega(x)) dx \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(x_s)|}} \exp(i\lambda\Omega(x_s) - i\pi/4).$$

Окончательно получим стандартную формулу:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \exp(i\lambda\Omega(x)) dx \sim \\ & \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(x_s)|}} \exp(i\lambda\Omega(x_s) + \text{sgn}(\Omega''(x_s))i\pi/4). \end{aligned} \quad (1.21)$$

### 1.6.4 Задача

Вычислить асимптотику функции Эйри при  $z \rightarrow \infty$ .

### 1.6.5 Литература

- 1 Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М. Мир, 1974.
- 2 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

## 1.7 Функция Бесселя

*Построен сходящийся ряд функции Бесселя. Выведено разностное уравнение для функций Бесселя разных порядков. Получено интегральное представление и асимптотика функции Бесселя в бесконечно удаленной точке.*

### 1.7.1 Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя имеет вид:

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение Бесселя возникает при переходе к разделению переменных в цилиндрической системе координат для линейных уравнений математической физики. Решения уравнения Бесселя иногда называют цилиндрическими функциями.

Легко видеть, что это уравнение имеет регулярную особую точку  $z = 0$ . Определяющее уравнение в этой точке

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2 = 0.$$

Показатели этой регулярной особой точки  $\alpha_{1,2} = \pm\nu$ . Следовательно, в окрестности  $z = 0$  можно построить решение уравнения (1.22) в виде:

$$w = z^{\pm\nu} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$$

если  $\nu \notin \mathbb{Z}$ .

Вычислим коэффициенты ряда для решения уравнения Бесселя. Для определенности будем строить функцию, соответствующую показателю  $\nu > 0$ .

Подставим формулу

$$w(z) = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$$

в уравнение Бесселя. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ . В результате получим:

$$(2\nu w_1 + w_1)z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (2\nu n + (n-1)n + n)w_n + w_{n-2} \right] z^{n-2} = 0.$$

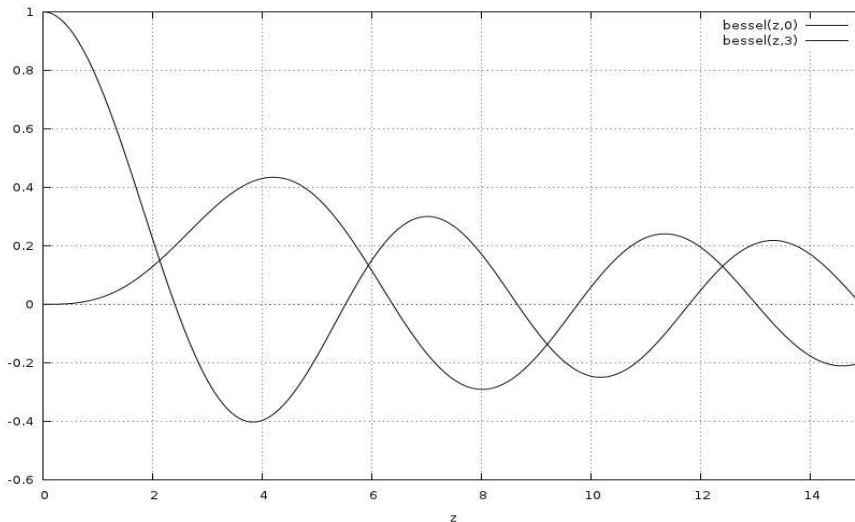


Рис. 1.10: Две функции Бесселя .



Система уравнений для определения коэффициентов  $w_n$ :

$$\begin{aligned} 2\nu w_1 + w_1 &= 0, \\ (2\nu + k)kw_n + w_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Поэтому можно сделать замену  $k = 2n$ , тогда:

$$w_k = -\frac{w_{k-1}}{(\nu + k)4k}.$$

Функция  $w(z)$  имеет вид:

$$w(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \frac{w_0}{(\nu + k)(\nu + k - 1) \dots \nu}.$$

В этой формуле воспользуемся гамма-функцией для представления произведения в знаменателе, кроме того, сделаем нормировку

$$w_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu)}.$$

Построенная таким образом функция имеет вид:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k. \quad (1.23)$$

Эта функция называется *функцией Бесселя*. Параметр  $\nu$  называется порядком функции Бесселя,  $z$  – аргументом.

Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, легко видеть, что ряд сходится. Если  $\nu$  – целое положительное число, тогда и функция Бесселя – целая функция.

Если  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , тогда функция Бесселя имеет точку ветвления  $z = 0$ . Главная ветвь функции Бесселя определяется главной ветвью функции  $z^\nu$ . Связь различных ветвей функции Бесселя дает формула:

$$J_\nu(z \exp(2i\pi t)) = \exp(2i\pi t \nu) J_\nu(z).$$

### 1.7.2 Разностное уравнение

Выясним, как связаны друг с другом функции Бесселя различных порядков. Для этого воспользуемся единственным, что у нас есть – представлением функции Бесселя (1.23).

$$J_{\nu-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k.$$

Здесь заменим гамма-функцию по формуле

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + k)\Gamma(\nu + n).$$

Тогда получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(z) &= \left(\frac{2}{z}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k = \\ &\nu \left(\frac{2}{z}\right) J_\nu(z) + \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

В результате:

$$J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{z} J_\nu - J_{\nu+1}. \quad (1.24)$$

Это и есть искомая формула, связывающая функции Бесселя различных порядков.

### 1.7.3 Интегральное представление

Для того, чтобы получить интегральное представление функции Бесселя, воспользуемся формулой (1.24). В этой формуле перейдем к образам Лапласа  $\tilde{J}$ . Преобразование Лапласа сделаем по порядковой переменной  $\nu$ . В результате уравнение (1.24) для образов Лапласа примет вид:

$$\exp(-p)\tilde{J} = \frac{2}{z}\tilde{J}' - \exp(p)\tilde{J}.$$

или

$$\tilde{J}' = z \cosh(p)\tilde{J}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, получим:

$$\log \tilde{J} = z \sinh(p) + C,$$

или

$$\tilde{J} = C \exp(z \sinh(p)).$$

Прообраз – функция Бесселя – может быть представлена в виде:

$$J = C \int_{\gamma} \exp(z \sinh(p)) \exp(-p\nu) dp.$$

Здесь, правда, пока еще не определена постоянная  $C$  и контур интегрирования. Значение постоянной мы получим ниже. Контур интегрирования должен обходить одну или несколько особых точек подынтегральной функции, так, чтобы его с помощью непрерывной деформации нельзя было стянуть в точку (такое требование обеспечивает, что интеграл

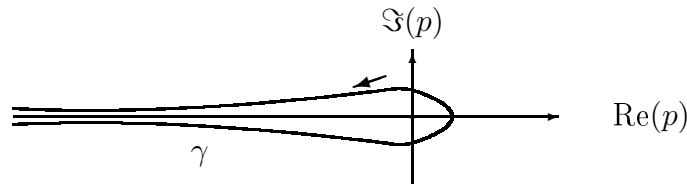


Рис. 1.11: Интегрирование по петле  $\gamma$ . Путь интегрирования обходит точку ветвления  $z = 0$  и проходит под и над разрезом  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .

не равен нулю тождественно). Для определения контура интегрирования удобно заменить переменную интегрирования:  $\exp(p) = -t$ ,  $-dt = \exp(p)dp$ . Тогда интеграл примет вид:

$$J_\nu(z) = C \int_\gamma \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

В этом интеграле точка  $t = 0$  – точка ветвления. Поэтому, если мы возьмем в качестве контура интегрирования петлю, приходящую с  $-\infty + i0$ , обходящую вокруг точки  $t = 0$  по часовой стрелке и уходящую обратно на  $-\infty - i0$ , тогда такой контур не сможет быть непрерывно стянут в точку, и, следовательно, интеграл не равен тождественно нулю. В результате получим:

$$J_\nu(z) = C \int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

Этот интеграл сходится при  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ .

Теперь займемся определением значения постоянной  $C$ . Для этого рассмотрим функцию Бесселя порядка  $\nu = 0$ . Воспользовавшись рядом для функции Бесселя, легко посчитать ее значение:  $J_0(0) = 1$ .

При  $\nu \in \mathbb{Z}$  нет никакого разреза в комплексной плоскости. Подынтегральные функции голоморфны всюду, за исключением точки  $t = 0$ . Поэтому интеграл по петле в представлении функции Бесселя можно деформировать в интеграл по любой окружности вокруг точки  $t = 0$ :

$$J_\nu = C \int_\gamma \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

где  $\gamma$  – окружность произвольного радиуса вокруг точки  $t = 0$ . Этим представлением воспользуемся для вычисления постоянной  $C$ :

$$J_0(0) = C \int_\gamma \frac{dt}{t^1} = 2i\pi C = 1.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2i\pi}.$$

Окончательно:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (1.25)$$

Как уже отмечалось, этот интеграл сходится при  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ . его можно преобразовать к виду, пригодному для любых значений  $z$ . Для этого сделаем замену:  $zt = l$ , тогда

$$t = \frac{l}{z}, \quad \frac{1}{t} = \frac{z}{l},$$

и

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} z^\nu \int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{l}{2} - \frac{z^2}{2l}\right) \frac{dl}{l^{\nu+1}}.$$

#### 1.7.4 Асимптотика функции Бесселя

Здесь приведена формула для асимптотики функции Бесселя при больших значениях модуля аргумента. Для получения асимптотической формулы воспользуемся интегральным представлением. Вообще говоря, для вычисления асимптотики интеграла в функции Бесселя обычно пользуются методом перевала. Однако, для простоты мы не будем привлекать метод перевала, а воспользуемся методом стационарной фазы, хотя, конечно, здесь это окажется одним и тем же.

Преобразуем контур интегрирования к интегралу по мнимой оси. Для этого надо деформировать ветви интеграла по петле – с верхнего берега разреза на верхнюю мнимую полуось, с нижнего берега разреза – на нижнюю мнимую полуось. Это можно сделать, так как подынтегральная функция голоморфна в конечной области левой полуплоскости комплексного параметра  $t$ , а интеграл при больших значениях  $t$  в левой полуплоскости экспоненциально убывает. Таким образом справедлива формула:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{(+0)} \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}} = \frac{1}{2i\pi} \int_L \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

где  $L$  – контур, проходящий по мнимой оси от минус бесконечности до плюс бесконечности и обходящий точку  $t = 0$  по малой окружности справа.

В полученном интервале сделаем замену переменной  $it = x$ , тогда интеграл примет вид:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} \exp(i(\nu + 1)\pi/4) \int_M \exp\left(\frac{iz}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \frac{dx}{x^{\nu+1}},$$

где контур  $M$  лежит на вещественной оси всюду, за исключением малой окрестности точки  $x = 0$ , которую он обходит по половинке окружности в верхней полуплоскости  $x$ .

Для вычисления асимптотики этого интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы. Применяя известные формулы, получим:

$$J_\nu(z)|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\pm} \exp(\pm iz) \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp(\pm i\pi/4 - \pi\nu/2) (1 + O(|z|^{-1})) = \\ \sqrt{\frac{12}{\pi z}} \left( \cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4) - \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \right) (1 + O(|z|^{-1})).$$

### 1.7.5 Задачи

- 1 Вычислить тип особой точки  $z = \infty$ .
- 2 С помощью интегрирования по частям показать, что решение разностного уравнения в виде интеграла по петле удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя.
- 3 Исследовать возможность обхода точки  $t = 0$  в интегральном представлении функции Бесселя по мнимой оси справа.

### 1.7.6 Литература

При подготовке лекции частично использовалась книга  
Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

## 1.8 Явление Стокса

*Строго говоря, явление Стокса имеет отношение к асимптотическим рядам для специальных функций, а не к самим специальным функциям. Однако, часто функции определяются с помощью рядов и, в частности, рядов асимптотических. В такой ситуации обсуждение явления Стокса выглядит вполне уместным. В этой лекции функции*

Ганкеля вводятся через их асимптотики в комплексной плоскости, и обсуждается асимптотическое поведение этих функций в окрестности точки ветвления бесконечного порядка.

Проще всего понять явление Стокса на примере решений уравнения

$$u'' - u = 0.$$

Функция  $u = \operatorname{ch}(z)$  – решение этого уравнения.

Асимптотика этого решения при  $|z| \rightarrow \infty$  в секторе  $\operatorname{Re}(z) > 0$ :

$$u \sim \exp(z)/2,$$

в секторе  $\operatorname{Re}(z) < 0$ :

$$u \sim \exp(-z)/2.$$

То есть асимптотика меняется скачком при непрерывном изменении  $\arg z$ . В этом, собственно, и состоит явление Стокса. Показав этот пример, можно было бы и закончить лекцию – тема по большому счету исчерпана. Однако, это далеко не так. Приведенное уравнение слишком просто и при исследовании асимптотик его решений оказываются незамеченными, например, такие важные в общем подходе элементы, как коэффициенты Стокса (здесь это тождественные единицы). Поэтому перейдем к исследованию несколько более сложного примера.

### 1.8.1 Формальные решения в виде асимптотических рядов

Исследуем поведение решений уравнения Бесселя

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0. \quad (1.26)$$

в окрестности иррегулярной особой точки  $z = \infty$ . На предыдущей лекции была написана асимптотика функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки. Характер асимптотического представления можно понять из тех асимптотических формул:

$$w(z) \sim \exp(\pm iz) \sqrt{\frac{1}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{-n}.$$

Здесь не используется знак равенства, потому что пока не исследован вопрос о сходимости представления  $w(z)$ , ряд понимается как формальный.

Для вычисления коэффициентов  $w_n$  надо подставить ряд в уравнение, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ . В результате получится рекуррентная система уравнений, из которой можно определить коэффициенты разложения  $w_n$ . Здесь эти действия пропущены, так как они уже не раз проводились и для уравнения Бесселя, и для гипергеометрического уравнения. Вместо вычислений приведем сразу ответ:

$$w_n = \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2n - 1)^2)}{n!8^n}.$$

Исследуем сходимость написанного ряда:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \Big|_{n \rightarrow \infty} \sim n.$$

То есть, ряд не сходится ни при каких значениях  $z$ .

Таким образом, воспользовавшись стандартной процедурой можно получить два формальных ряда, которые являются формальными решениями уравнения Бесселя, но не сходятся и, следовательно, не представляют никакого настоящего решения уравнения Бесселя. С другой стороны, можно надеяться, что эти ряды являются асимптотическими представлениями каких-то функций, которые, в свою очередь являются решениями уравнения Бесселя.

## 1.8.2 Обоснование асимптотик

Прежде, чем как-либо использовать построенные формальные ряды выясним, во-первых, – есть ли такие функции, которые приближаются построенными рядами, во-вторых, – область значений комплексного параметра  $z$  для которой пригодны построенные приближения. Стандартный подход в этом случае следующий.

Возьмем отрезок формального ряда длиной  $N$ :

$$L_N = \exp(\pm iz) \sqrt{\frac{1}{z}} \sum_{n=0}^N w_n z^{-n}.$$

Будем искать решение в виде:

$$w = L_N + u(z).$$

Здесь неизвестная функция  $u$  называется остатком асимптотики. Подставим формулу для  $w$  в уравнение. В результате получим уравнение для неизвестной функции  $u(z)$ :

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = -L'_N, \quad (1.27)$$

где  $L'_n$  – результат применения дифференциального оператора (левой части уравнения Бесселя) к куску ряда  $L_n$ . Непосредственно из построения следует, что правая часть в уравнении (1.27) имеет вид:

$$-L'_N = \exp(iz)A_N z^{-N-2-1/2},$$

где  $A_N$  – постоянная.

Малые при  $z \rightarrow \infty$  слагаемые в уравнении для  $u(z)$  перенесем в правую часть. В результате получим:

$$u'' + u = -\frac{u'}{z} + \frac{\nu^2 u}{z^2} - L'_N.$$

Теперь удобно перейти от дифференциального уравнения к интегральному уравнению для  $u(z)$ :

$$u(z) = -\exp(iz) \int_z^\infty d\zeta \exp(-i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - L'_N \right] - \\ \exp(-iz) \int_z^\infty d\zeta \exp(i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - L'_N \right].$$

В этом уравнении надо определить какой-нибудь путь интегрирования. С одной стороны может показаться, что это не так уж и важно, потому что подынтегральные функции аналитические, а бесконечно удаленная точка на комплексной плоскости единственная. Однако, это не совсем так. Важно определить линию, по которой происходит подход к бесконечно удаленной точке. Ведь бесконечно удаленная точка – существенно особая для подынтегральной функции. Чтобы проще всего было оценивать интеграл, естественно выбрать путь, на котором подынтегральная экспонента быстрее всего убывает. Для этого подставим в явном виде выражение для  $L'_N$ :

$$u(z) = -\exp(iz) \int_z^\infty d\zeta \exp(-i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - \exp(i\zeta)A_N \zeta^{-N-2-1/2} \right] - \\ \exp(-iz) \int_z^\infty d\zeta \exp(i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} - \exp(i\zeta)A_N \zeta^{-N-2-1/2} \right].$$

Из приведенной формулы видно, что надо уходить в бесконечность по положительной части мнимой оси, в этом случае, по крайней мере известные слагаемые связанные с  $L'_N$  убывают быстрее всего. О неизвестной функции  $u(\zeta)$  пока ничего определенного сказать нельзя.



Что касается конечной области параметра  $|\zeta| > 0$  – здесь важно, чтобы на линии интегрирования не росла вещественная часть подынтегральной экспоненты. В этом случае ее легко оценить, с ней и оценить интеграл:

$$|\exp(-iz) \int_z^{i\infty} d\zeta \exp(2i\zeta) A_N \zeta^{-N-2-1/2}| \leq |\exp(iz) \zeta^{-N-3/2} \text{const}|. \quad (1.28)$$

При интегрировании, еще важно не приближаться к нулю, там точка ветвления, да еще и особенность. Если не удастся построить путь интегрирования, на котором вещественная часть показателя экспоненты при движении к  $i\infty$  не растет, это значит, что интеграл оценивается экспонентой с показателем, вещественная часть которого больше, чем  $2iz$ . Следовательно, не удастся при оценке интеграла получить множитель  $\exp(iz)$ , важный для дальнейших оценок.

Итак, в случае, если можно провести путь интегрирования от точки  $z$  к  $i\infty$  так, что на нем вещественная часть экспоненты в интеграле (1.28) не возрастает, имеем:

$$u(z) = -\exp(iz) \int_z^{\infty} d\zeta \exp(-i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} \right] - \exp(-iz) \int_z^{\infty} d\zeta \exp(i\zeta) \left[ -\frac{u'}{\zeta} + \frac{\nu^2 u}{\zeta^2} \right] + F(z),$$

где

$$|F(z)| \leq |\exp(iz) z^{-N-3/2} \text{const}|.$$

Теперь вспомним, что на самом деле точка  $\infty$  – существенно особая точка, точка ветвления бесконечного порядка. Дальше, рассматривая  $z$  как точку на римановой поверхности функции логарифм, легко понять, что требуемые для оценки (1.28) условия на путь интегрирования выполняются только для точек,  $z$ , достаточно удаленных от нуля и таких, что  $-\pi < \arg(z) < 2\pi$ .

Пусть  $z$  удовлетворяет этим условиям, тогда методом последовательных приближений можно показать, что для решения интегро-дифференциального уравнения – функции  $w(z)$  справедлива оценка:

$$w(z) = O(\exp(iz) z^{-N-3/2}).$$

То есть, построенный в предыдущем пункте ряд является асимптотическим рядом для некоторой функции  $u(z)$  – решения уравнения Бесселя.

### 1.8.3 Функции Ганкеля

Для удобства обычно устраивают нормировку полученных рядов, умножая их на

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\pm\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)i\pi\right).$$

Функции, асимптотики которых были построены называются функциями Ганкеля. Эти функции определяются их асимптотическими представлениями в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \exp(i\zeta) \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n w_n z^{-n}, \quad -\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta, \quad (1.29)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \exp(-i\zeta) \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n w_n z^{-n}, \quad -2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad (1.30)$$

при  $z \rightarrow \infty$ ,  $\zeta = z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta > 0$ .

### 1.8.4 Явление Стокса.

Функции Ганкеля, так же, как и функции Бесселя, – линейно независимые решения уравнения Бесселя. Поэтому функции Бесселя можно выразить через функции Ганкеля, для этого достаточно вспомнить асимптотику функций Бесселя при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)).$$

$$J_{-\nu}(z) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)) = \\ \frac{1}{2}(\exp(\nu\pi i)H_\nu^{(1)}(z) + \exp(-\nu\pi i)H_\nu^{(2)}(z)).$$

Из этих формул можно исключить  $H_\nu^{(1)}(z)$  и  $H_\nu^{(2)}(z)$ . В результате получим:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)}(\exp(-\nu\pi i)J_\nu(z) + J_{-\nu}(z)), \\ H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)}(\exp(i\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)).$$

Дальше для вычисления функции Ганкеля при повороте аргумента на угол  $\pi it$  можно воспользоваться формулами для поворота аргумента в функции Бесселя:

$$J_\nu(z \exp(it\pi)) = \exp(it\nu\pi)J_\nu(z).$$

Эта формула и выражение функции Бесселя через функцию Ганкеля дает:

$$\begin{aligned}
 H_\nu^{(1)}(z \exp(im\pi)) &= \\
 \frac{-1}{\sin(\nu\pi)} [\sin((m-1)\nu\pi) H_\nu^{(1)}(z) + \exp(-i\nu\pi) \sin(m\nu\pi) H_\nu^{(2)}(z)], \\
 H_\nu^{(2)}(z \exp(im\pi)) &= \\
 \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [\exp(i\nu\pi) \sin(m\nu\pi) H_\nu^{(1)}(z) + \sin((m+1)\nu\pi) H_\nu^{(2)}(z)].
 \end{aligned}$$

Проиллюстрируем полученные формулы. Для этого возьмем  $m = 2$ , тогда

$$H_\nu^{(1)}(z \exp(2i\pi)) = -H_\nu^{(1)}(z) - (1 + \exp(-2\nu\pi)) H_\nu^{(2)}(z),$$

когда  $|\arg z| \leq \pi - \delta$  верно и это представление и представление (1.29), правда, в этой области функция  $H_\nu^{(2)}(z)$  экспоненциально мала, так что при построении асимптотики главная часть разложения определяется в (1.29).

**Вывод.** При переходе от сектора к сектору аргумент функции меняется непрерывно, а коэффициенты асимптотического разложения для этой функции меняются дискретно. В этом и состоит явление *Стокса*. Коэффициенты в асимптотическом представлении, меняющиеся скачкообразно называются *коэффициентами Стокса*. Лучи, на которых происходит смена коэффициентов в асимптотическом разложении, называются *линии Стокса*. Лучи, на которых растущая и убывающая асимптотики меняются местами, называются *антистоксовыми линиями*.

### 1.8.5 Задача

Завершить доказательство близости асимптотического ряда к некоторому решению уравнения Бесселя.

### 1.8.6 Литература

При подготовке лекции частично использовалась книга

1 Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции, М., Наука, 1990.

## Глава 2

# Эллиптические функции

Здесь эллиптические функции рассматриваются в основном как решения нелинейных дифференциальных уравнений. В последнем разделе показано приложение эллиптических функций в теории движений твердого тела с закрепленной точкой.

### 2.1 Функция Вейерштрасса

*Здесь  $\mathcal{P}$ -функция Вейерштрасса введена, как решение уравнения первого порядка на римановой поверхности рода 1. Показано, что эта функция двоякопериодическая. Приводится теорема Лиувилля для эллиптической функции.*

#### 2.1.1 Дифференциальное уравнение

В этой лекции будет изучаться решение дифференциального уравнения первого порядка

$$(u')^2 = 4u^3 - g_2u - g_3. \quad (2.1)$$

Оно появляется, например, если начать интегрировать уравнение второго порядка с квадратичной нелинейностью

$$u'' = 6u^2 - g_2/2.$$

Разделить переменные в уравнении (2.1) просто:

$$dz = \frac{\pm du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

Следующий этап – проинтегрировать уравнение с разделенными переменными. Вот здесь есть некоторая неясность. Во первых, – что означает

$\pm$ ? Какой из знаков выбрать? Параметр  $u$  лежит на двулистной римановой поверхности, по какому пути на этой поверхности проводить путь интегрирования? Перейдем к ответам на эти вопросы.

Для однозначного определения решения нелинейного уравнения первого порядка, зачастую (у нас именно такой случай), недостаточно задать только значение функции  $u$  в какой-либо точке, необходимо еще задать знак  $+$  или  $-$ , то есть, выбрать лист римановой поверхности (это условие лишнее только в точках ветвления). То есть, данные Коши:

$$z = z_0, \quad u|_{z_0} = u_0, \quad \text{знак перед корнем.}$$

Выберем для простоты в качестве начальной – точку ветвления  $z = \infty$ . В этом случае, по крайней мере формально, получим:

$$z = - \int_u^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}.$$

Функция  $u = \mathcal{P}(z)$ , обратная к этому эллиптическому интегралу, называется  $\mathcal{P}$ -функцией Вейерштрасса:

### 2.1.2 Двойкопериодичность

Вообще говоря, если хочется получить решение уравнения, то все равно, по какому пути на римановой поверхности интегрировать. Но на самом-то деле не все пути эквивалентны. Обозначим  $e_1, e_2, e_3$  корни кубического полинома

$$4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3 = 0.$$

Для определенности будем считать, что  $e_3$  – вещественный корень. Соединим разрезом на римановой поверхности  $e_1$  и  $e_2$ ,  $e_3$  и  $\infty$ . Цикл на верхнем листе поверхности, обходящий отрезок  $[e_1, e_2]$ , назовем  $a$ - периодом. Цикл, соединяющий два разреза и проходящий по верхнему и нижнему листу поверхности –  $b$ - периодом.

Можно усмотреть, что любой путь  $\gamma$  на римановой поверхности можно представить в виде пути, не обходящего полностью ни один цикл  $\gamma'$ , и суммы конечного числа обходов по  $a$  и  $b$  циклам.

$$\gamma = \gamma' + am + bn, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что функция Вейерштрасса – двойкопериодическая, а числа

$$2\omega_1 = \int_a \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \quad 2\omega_2 = \int_b \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}$$

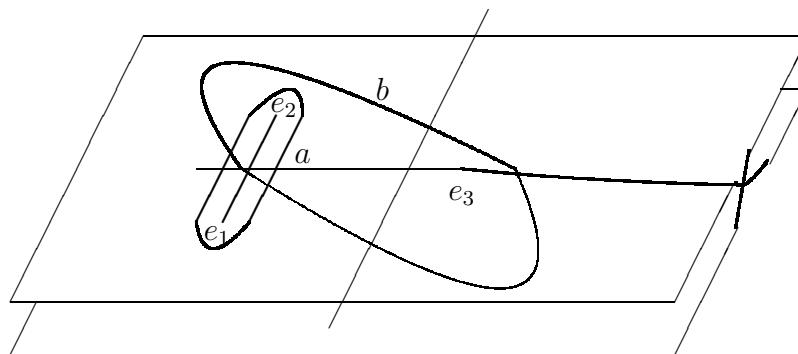


Рис. 2.1: Риманова поверхность квадратного корня как двулистное накрытие комплексной плоскости с разрезами  $[e_1, e_2]$  и  $[e_3, \infty)$ . Цикл  $a$  обходит вокруг разреза  $[e_1, e_2]$ , Цикл  $b$  на верхнем листе выходит из разреза  $[e_3, \infty)$  и уходит на нижний лист через разрез  $[e_1, e_2]$ .

– периоды этой функции, то есть:

$$\mathcal{P}(z + m\omega_1 + n\omega_2) = \mathcal{P}(z).$$

Конечно, если бы отношение этих двух чисел было вещественным, то ни о какой дwoякопериодичности не могло бы идти и речи – вещественный период у функции может быть только один. Однако здесь отношение периодов – число комплексное. Покажем это. Во-первых, интеграл по  $a$ -циклу легко деформировать в интеграл вокруг разреза по вещественной оси от  $[e_3, \infty)$ . При этом, правда, остается еще интеграл по большой окружности на верхнем листе римановой поверхности, но он равен нулю из-за убывания подынтегральной функции при  $|z| \rightarrow \infty$ . Интеграл по верхнему и нижнему берегам разреза  $[e_3, \infty)$  – вещественный из-за вещественности подынтегрального выражения. Также легко показать, что интеграл по циклу  $b$  чисто мнимый. В результате получаем: отношение периодов  $\omega_1/\omega_2$  – комплексное число.

Из-за дwoякопериодичности эту функцию достаточно изучить в прямоугольнике  $0 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\omega_1$ ,  $0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\omega_2$ . Этот прямоугольник иногда называется *многообразием Якоби*.

### 2.1.3 Представление в виде ряда

При  $z \rightarrow 0$  значение функции Вейерштрасса  $u \rightarrow \infty$ . Причем, воспользовавшись интегральным представлением, легко получить:

$$z \sim \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \text{или} \quad u \sim \frac{1}{z^2}.$$

Так как функция Вейерштрасса периодическая, следовательно, так же она ведет себя во всех точках  $z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ , тогда:

$$\mathcal{P}(z) \sim \sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} + \text{регулярная часть.}$$

Регулярная часть – периодическая и ограниченная функция во всей комплексной плоскости, следовательно, она может быть равна только постоянной.

Однако легко заметить, что написанный ряд расходится. Показать это можно, воспользовавшись интегральным признаком сходимости:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{((z + 2N\omega_2) + 2m\omega_2)^2} &\sim \int_0^{\infty} \frac{dm}{((z + 2N\omega_2) + 2m\omega_2)^2} = \\ &= \frac{1}{z + 2N\omega_1}. \end{aligned}$$

По  $N$  полученное выражение уже не суммируется.

Расходящийся ряд можно регуляризовать, выкинув расходящуюся часть:

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right]. \quad (2.2)$$

Этот ряд сходится, и его сумма и есть  $\mathcal{P}$ -функция Вейерштрасса.

### 2.1.4 Четность

Ряд для производной  $\mathcal{P}'(z)$  легко получить почленным дифференцированием формулы (2.2):

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3}.$$

Заменим  $z$  на  $-z$  в этой формуле. В результате простых преобразований:

$$\mathcal{P}'(-z) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(-z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3} =$$

$$= 2 \sum_{m,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3} = -\mathcal{P}'(z).$$

Вывод – производная функции Вейерштрасса – нечетная функция.

Так же, используя представление в виде ряда для  $\mathcal{P}(z)$ , легко увидеть:

$$\mathcal{P}(-z) = \mathcal{P}(z),$$

то есть, функция Вейерштрасса – четная.

### 2.1.5 Связь между $\omega_1, \omega_2$ и параметрами уравнения

Представим  $\mathcal{P}(z)$  в виде ряда по степеням  $z$ :

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + u_2 z^2 + \dots$$

Если эту формулы подставить в уравнение, тогда после несложных преобразований можно получить:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots,$$

где

$$g_2 = 60 \sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^6}.$$

### 2.1.6 Теорема Лиувилля

Теорема Лиувилля – это во многом теорема Коши, примененная к эллиптическим функциям:

**Теорема.** Пусть  $F(z)$  – эллиптическая функция. Сумма всех вычетов этой функции относительно всех ее полюсов равна нулю.

Перейдем к доказательству этого утверждения. Будем рассматривать  $F(z)$  в параллелограмме периодов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  таком, что на сторонах этого параллелограмма  $F(z)$  регулярен. Тогда интеграл по границе параллелограмма периодов:

$$\begin{aligned} \int_Q F(z) dz &= \int_c^{c+\Omega_1} F(z) dz + \int_{c+\Omega_1}^{c+\Omega_1+\Omega_2} F(z) dz + \\ &\quad \int_{c+\Omega_1+\Omega_2}^{c+\Omega_2} F(z) dz + \int_{c+\Omega_2}^c F(z) dz. \end{aligned}$$



В этой формуле из-за периодичности подынтегральной функции второй и третий интегралы можно переписать в виде интегралов по отрезкам  $[c, c + \Omega_2]$  и  $[c + \Omega_2, c]$ . В результате получим:

$$\int_Q F(z)dz = \int_c^{c+\Omega_1} F(z)dz + \int_c^{c+\Omega_2} F(z)dz + \int_{c+\Omega_1}^c F(z)dz + \int_{c+\Omega_2}^c F(z)dz.$$

Подынтегральные функции одинаковы, а направление интегрирования разное. Это приводит к формуле:

$$\int_Q F(z)dz = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают несколько важных следствий.

**Следствие 1.** Число полюсов эллиптической функции с учетом их кратности не может быть меньше двух.

**Следствие 2.** Если вместо  $f(z)$  рассматривать  $\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-a}$ , где  $a = \text{const}$ , тогда число полюсов отличной от постоянной функции равно числу точек, где  $f(z) = a$  для  $\forall a$ .

**Следствие 3.** Не существует отличной от постоянной эллиптической функции, регулярной в параллелограмме периодов.

### 2.1.7 Задача

Указать расположение нулей функции Вейерштрасса внутри прямоугольника периодов.

### 2.1.8 Литература

При подготовке к этой лекции использовались:

- 1 Н.И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- 2 Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

## 2.2 Эллиптические функции Якоби

*Исследована функция синус амплитуды комплексного аргумента. Выписаны приближенные представления этой функции при значениях параметра близких к нулю и единице.*

### 2.2.1 Функция синус амплитуды

Название функции синус амплитуды видимо происходит из ее связи с решением уравнения математического маятника:

$$\phi'' + \sin(\phi) = 0. \quad (2.3)$$

Умножим уравнение на  $\phi'$  и проинтегрируем по  $t$ , в результате получим:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - \cos(\phi) = E. \quad (2.4)$$

Будем рассматривать только колебательные движения математического маятника. Для таких движений  $|E| \leq 1$ . В этом случае удобно параметр  $E$  переобозначить  $E = \cos(s)$ . Воспользовавшись формулой  $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ , решение уравнения математического маятника можно записать в виде:

$$t + t_0 = \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(s/2)}}.$$

Эту формулу оказывается удобнее рассматривать, когда в подынтегральной функции под знаком корня вместо синуса есть полиномиальная зависимость от переменной интегрирования. Для перехода к такой записи можно сделать замену:

$$ku = \sin(s/2) \quad k = \sin(\phi_0/2).$$

Тогда

$$kdu = \frac{\cos(s/2)}{2} ds, \quad \text{или} \quad ds = \frac{2kdu}{\sqrt{1 - k^2u^2}}.$$

Следовательно, решение уравнения математического маятника выражается через интеграл вида:

$$t = \int_0^{\frac{\sin(\phi/2)}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}. \quad (2.5)$$

Теперь удобно рассматривать функцию, обратную интегралу, как новую специальную функцию.

$$u = \operatorname{sn}(t|k), \quad \text{где} \quad \sin(\phi/2) = u \sin(\phi_0/2).$$

Эта новая функция называется *синус амплитуды* или *синус Якоби*.

### 2.2.2 Периодичность

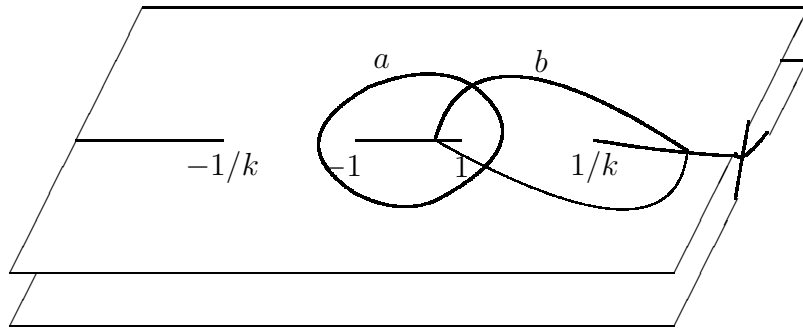


Рис. 2.2: Риманова поверхность  $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$ , как двулистное накрытие комплексной плоскости с разрезами  $[-1, 1]$ ,  $(-\infty, -1/k]$  и  $(1/k, \infty]$ . Цикл  $a$  обходит вокруг разреза  $[-1, 1]$ . Цикл  $b$  на верхнем листе выходит из разреза  $[-1, 1]$  и уходит на нижний лист через разрез  $[1/k, \infty)$ .

Функция  $\operatorname{sn}(z|k)$  обратна интегралу

$$z = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \quad (2.6)$$

Здесь параметр  $k$  (*модуль эллиптической функции*) – положительное число, не большее единицы. Интегрирование ведется по пути на двулистной римановой поверхности, определяющейся уравнением:

$$w^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2).$$

Проведем на верхнем листе этой поверхности два разреза. Пусть один разрез проходит по отрезку  $[-1, 1]$ , второй – соединяет точки  $-1/k$  и  $1/k$

через бесконечно удаленную точку и лежит на вещественной оси. Противоположные края разрезов склеим, как обычно, с противоположными краями таких же разрезов на нижнем листе. Устроим циклы на этой римановой поверхности. Пусть цикл  $a$  лежит на верхнем листе и окружает отрезок  $[-1, 1]$ . Цикл  $b$  проходит по верхнему листу от точки ветвления 1 до точки ветвления  $1/k$ . Затем переходит на нижний лист и там проходит от  $1/k$  до 1, где и возвращается на верхний лист поверхности.

Путь интегрирования по римановой поверхности в интеграле (2.6) определен с точностью до целого числа циклов  $a$  и  $b$ . Это означает, что функция обратная интегралу (2.6) – периодическая функция с периодами равными интегралам по циклам  $a$  и  $b$ .

$$T = \int_a \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

$$T' = \int_b \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2 \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Число  $T$  – вещественное, так как подынтегральная функция вещественная на всем пути интегрирования. Число  $T'$  – мнимое, потому что подынтегральная функция мнимая. Отношение периодов функции  $\operatorname{sn}(z|k)$  – мнимое, следовательно эта функция – двоякопериодическая.

Обычно вводят обозначения:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Пользуясь этими обозначениями, пишут:

$$T = 4K(k), \quad T' = 4K'(k).$$

### 2.2.3 Эллиптические функции Якоби

Эллиптические функции в анализе обычно вводятся либо как мероморфные двоякопериодические функции комплексного переменного, либо как обратные функции эллиптических интегралов. Здесь мы воспользуемся определением эллиптических функций Якоби при помощи дифференциальных уравнений.

Продифференцировав (2.5) по  $t$ , легко увидеть, что функция синус амплитуды удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y' = \sqrt{(1 - k^2 y^2)(1 - y^2)}.$$

Обозначим:  $\text{cn}^2(t|k) = 1 - \text{sn}^2(t|k)$ ,  $\text{dn}^2 = 1 - k^2 \text{sn}^2(t|k)$ . Функция  $\text{cn}(t|k)$  называется *косинус амплитуды или косинус Якоби*, а  $\text{dn}(t|k)$  – *дельта амплитуды*. Выведем формулы для производных этих функций.

$$2\text{cn}'(t|k)\text{cn}(t|k) = -2\text{sn}(t|k)\sqrt{(1 - \text{sn}^2(t|k))(1 - k^2 \text{sn}^2(t|k))},$$

$$2\text{dn}'(t|k)\text{dn}(t|k) = -2k^2 \text{sn}(t|k)\sqrt{(1 - \text{sn}^2(t|k))(1 - k^2 \text{sn}^2(t|k))}.$$

Или

$$\text{sn}'(t|k) = \text{cn}(t|k)\text{dn}(t|k),$$

$$\text{cn}'(t|k) = -\text{sn}(t|k)\text{dn}(t|k),$$

$$\text{dn}'(t|k) = -k^2 \text{sn}(t|k)\text{cn}(t|k).$$

Таким образом, тройка функций  $\text{sn}(t|k)$ ,  $\text{cn}(t|k)$ ,  $\text{dn}(t|k)$  удовлетворяет системе уравнений:

$$y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = -k^2 y_1 y_2, \quad (2.7)$$

с начальными условиями, легко получающимися из интегрального представления  $\text{sn}(t|k)$ :

$$y_1|_{u=0} = 0, \quad y_2|_{u=0} = 1, \quad y_3|_{u=0} = 1. \quad (2.8)$$

Если отвлечься от истоков появления функции  $\text{sn}(t|k)$  – как обращения интеграла (2.5), то можно вводить эллиптические функции как решения задачи Коши (2.7), (2.8). Один первый интеграл этой системы получается, если первое уравнение умножить на  $2y_1$ , второе – на  $2y_2$  и сложить оба полученных выражения.

$$2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' = (y_1^2 + y_2^2)' = 0.$$

Еще один интеграл получается, если первое уравнение умножить на  $2k^2 y_1$ , третье – на  $2y_3$  и сложить их:

$$2k^2 y_1' y_1 + 2k^2 y_3' y_3 = (k^2 y_1^2 + y_3^2)' = 0.$$

В результате два первых интеграла:

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1, \quad k^2 y_1^2 + y_3^2 = c_2.$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются из начальных условий (2.8). Это приводит к тождествам:

$$\text{sn}^2(t|k) + \text{cn}^2(t|k) = 1, \quad k^2 \text{sn}^2(t|k) + \text{dn}^2(t|k) = 1. \quad (2.9)$$

### 2.2.4 Разложение в окрестности нуля аргумента

В следующих пунктах будут приведены формулы для разложения функции синус амплитуды при малом значении аргумента и значениях параметра  $k$  близких к нулю и единице. Эти разложения, вообще говоря, пригодны в окрестности вещественной оси  $\Im(z) = 0$ . Чтобы подчеркнуть тот факт, что аргумент функции вещественный, он обозначается через  $t$ .

Пусть значение  $t$  достаточно мало. Тогда  $\operatorname{sn}(t|k)$  можно искать в виде ряда по степеням  $t$ .

$$\operatorname{sn}(t|k) = f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение для функции  $\operatorname{sn}(t|k)$ :

$$(y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} (f_1(k) + 2f_2(k)t + 3f_3(k)t^2 + \dots)^2 = \\ (1 - (f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots)^2) \times \\ (1 - k^2(f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \dots)^2). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} f_1^2(k) &\equiv 1 & 4f_1(k)f_2(k) &\equiv 0, \\ 6f_1(k)f_3(k) + 4f_2^2(k) &= -f_1^2(k) - k^2f_1(k). \end{aligned}$$

Окончательно, разложение в окрестности нулевого значения аргумента:

$$\operatorname{sn}(t|k) = t - \frac{1}{6}(1 + k^2)t^3 + \dots$$

Выражение для общего члена этого ряда неизвестно.

### 2.2.5 Разложение в окрестности нулевого значения параметра

Пусть параметр  $k$  близок к нулю, тогда функция  $\operatorname{sn}(t|k)$  близка к тригонометрическому синусу. Это легко показать, если искать представление  $\operatorname{sn}(t|k)$  в виде:

$$\operatorname{sn}(t|k) = \phi_0(t) + \phi_1(t)k + \phi_2(t)k^2 + \phi_3(t)k^3 + \dots$$

Подставим это выражение в дифференциальное выражение для функции  $\operatorname{sn}(t|k)$ .

$$\begin{aligned} & (\phi'_0 + \phi'_1 k + \phi'_2 k^2 + \phi'_3 k^3 + \dots)^2 = \\ & = (1 - (\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \dots)^2) \times \\ & (1 - k^2(\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \dots)^2). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ . В результате получим дифференциальные уравнения для функций  $\phi_j$ :

$$(\phi'_0)^2 = 1 - \phi_0^2, \quad 2\phi'_1\phi'_0 = -2\phi_0\phi_1, \quad 2\phi'_0\phi'_2 + (\phi'_1)^2 = -2\phi_0\phi_2 - \phi_0^2, \quad \dots$$

Начальные условия для функций  $\phi_j$ :

$$\phi_0|_{t=0} = 1, \quad \phi_j|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Решения этой рекуррентной системы уравнений:

$$\phi_0 = \sin(t), \quad \phi_1 \equiv 0, \quad \phi_2 = (-t \cos(t) + \sin(t) \cos^2(t))/2, \quad \dots$$

В результате получим:

$$\operatorname{sn}(t|k) = \sin(t) + \frac{k^2}{2}(-t \cos(t) + \sin(t) \cos^2(t)) + \dots$$

### 2.2.6 Разложение в окрестности $k = 1$

Рассмотрим случай, когда параметр  $k$  близок к 1. В этом случае его удобно выразить через дополнительный модуль  $k^2 = 1 - (k')^2$ . Решение уравнения для синуса амплитуды опять будем искать в виде ряда, но уже по степеням дополнительного модуля  $k'$ :

$$\operatorname{sn}(t|k) = \psi_0(t) + k'\psi_1(t) + (k')^2\psi_2(t) + \dots$$

Подставим это разложение в дифференциальное уравнение для  $\operatorname{sn}(t|k)$ :

$$\begin{aligned} & (\psi'_0 + \psi'_1 k' + \psi'_2 (k')^2 + \dots)^2 = (1 - (\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 (k')^2 + \dots)^2) \times \\ & (1 - (1 - (k')^2)(\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 k^2 + \dots)^2). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $k'$ . В результате получим рекуррентную последовательность уравнений.

$$\begin{aligned} & (\psi'_0)^2 = (1 - \psi_0^2)^2, \quad 2\psi'_1\psi'_0 = -2\psi_0\psi_1, \\ & 2\psi'_0\psi'_2 + (\psi'_1)^2 = -2\psi_0\psi_2(1 - \psi_0^2) - (2\psi_0\psi_2 - \psi_0^2)(1 - \psi_0^2), \quad \dots \end{aligned}$$

Начальные условия для функций  $\psi_j$  такие же, как и для функций  $\phi_j$  в предыдущем пункте. Решив уравнения для первых трех коэффициентов разложения, получим:

$$\operatorname{sn}(t|k) = \tanh(t) + \frac{1}{2}(k')^2(\operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) - t) \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} + \dots$$

### 2.2.7 Задачи

- 1 Представить функцию Вейерштрасса через функцию синус амплитуды.
- 2 Указать координаты нулей функции  $\operatorname{sn}(t|k)$ .
- 3 Указать координаты полюсов функции  $\operatorname{sn}(t|k)$ .
- 4 Написать асимптотику решения уравнения

$$u'' + g_2u + g_3u^2 + \varepsilon u^3 = 0,$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 2.2.8 Литература

- 1 Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

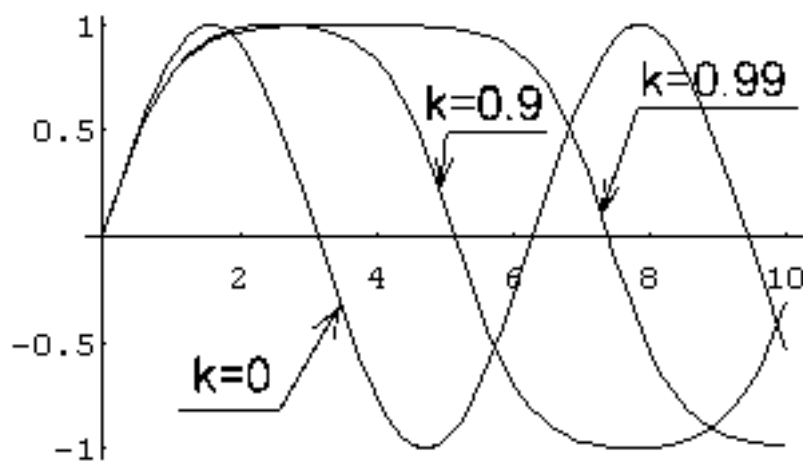


Рис. 2.3: Функция  $\operatorname{sn}(x|k)$ .



## 2.3 Тэта-функции

*Тэта-функции – удобный аппарат для вычислений из-за простоты аналитических свойств и быстрой сходимости рядов их определяющих. Поэтому часто вычисления, связанные с эллиптическими функциями, проводятся именно в терминах тэта-функций.*

### 2.3.1 Тэта-функция Якоби

Уже из названия лекции ясно, что тэта-функций несколько. Для первого знакомства в качестве основной возьмем тэта-функцию Якоби:

$$\theta_4(z|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)). \quad (2.10)$$

Иногда, следуя самому Якоби, эта функция обозначается как  $\Theta(z|\tau)$ . В формуле (2.10) переменная  $z$  называется аргументом, а  $\tau$  – параметром. Часто для краткости параметр  $\tau$  не пишут:  $\theta_4(z)$ , конечно, когда это не приводит к недоразумениям.

Легко видеть, что для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{Re}(i\pi\tau) < 0$ . Это условие приводит к ограничению на значения параметра тэта-функции  $\Im(\tau) > 0$ . Воспользовавшись признаком Даламбера для сходимости рядов, можно убедиться, что функция  $\theta_4(z)$  – целая функция.

Функцию  $\theta_4(z|\tau)$  легко переписать в виде сходящегося тригонометрического ряда:

$$\theta_4(z|\tau) = 1 - 2q \cos(2\pi z) + 2q^4 \cos(4\pi z) - 2q^9 \cos(6\pi z) + \dots, \quad q = \exp(-i\pi\tau).$$

Из этой формулы легко видеть, что  $\theta_4(z|\tau)$  – четная функция, периодическая функция  $z$ :

$$\theta_4(z+1) = \theta_4(z).$$

Еще одно важное свойство тэта-функции – квазипериодичность по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \theta_4(z + \tau|\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz + 2m\tau)) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)(-1)^{m+1} \exp(i\pi((m+1)^2\tau - \tau + 2(m+1)z - 2z)) = \\ &= -\exp(-i\pi(\tau + 2z)) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)). \end{aligned}$$

В результате получается формула:

$$\theta_4(z + \tau|\tau) = -\exp(-i\pi(\tau + 2z))\theta_4(z|\tau).$$

То есть, функция  $\theta_4(z)$  – квазидвоякопериодическая. Это замечание позволяет определить поведение тэта-функции на всей комплексной плоскости, зная ее поведение в параллелограмме с вершинами  $0, \tau, \tau + 1, 1$ .

Из тэта-функции легко получить двоякопериодическую функцию. Для этого можно воспользоваться формулой:

$$\ln \theta_4(z + \tau) = i\pi - i\pi(2z + \tau) + \ln \theta_4(z).$$

Если эту формулу дважды продифференцировать по  $z$ , тогда первое слагаемое пропадет и получим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \theta_4(z + \tau) = \frac{d^2}{dz^2} \ln \theta_4(z),$$

то есть

$$\phi(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln \theta_4(z)$$

– двоякопериодическая функция.

### 2.3.2 Дифференциальное уравнение

Функция  $\theta_4(z|\tau)$  – частное решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$\partial_z^2 \theta_4 + i4\pi \partial_\tau \theta_4 = 0.$$

Это легко проверить прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \theta_4(z|\tau) &= -4\pi^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)); \\ \partial_\tau \theta_4(z|\tau) &= i\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 (-1)^m \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)). \end{aligned}$$

### 2.3.3 Еще три тэта-функции

Для удобства вычислений обычно вводят еще три тэта функции:

$$\theta_1(z|\tau) = -i \exp(i\pi(z + \frac{1}{4}\tau))\theta_4(z + \frac{1}{2}\tau|\tau) =$$

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp(i\pi((m + \frac{1}{2})^2\tau + 2m(z + 1))), \\
\theta_2(z|\tau) &= \theta_1(z + \frac{1}{2}|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\pi((m + \frac{1}{2})^2\tau + 2m(z + 1))), \\
\theta_3(z|\tau) &= \theta_4(z + \frac{1}{2}|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\pi(m^2\tau + 2mz)).
\end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
\theta_3(z + 1|\tau) &= \theta_3(z|\tau), & \theta_3(z + \tau) &= \exp(-i\pi(\tau + 2z))\theta_3(z|\tau), \\
\theta_2(z + 1|\tau) &= -\theta_2(z|\tau), & \theta_2(z + \tau) &= \exp(-i\pi(\tau + 2z))\theta_3(z|\tau), \\
\theta_1(z + 1|\tau) &= -\theta_1(z|\tau), & \theta_1(z + \tau) &= -\exp(-i\pi(\tau + 2z))\theta_1(z|\tau).
\end{aligned}$$

Эти функции также, как и  $\theta_4(z)$  можно записать в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= 2q^{1/4} \sin(z\pi) - 2q^{9/4} \sin(3z\pi) + 2q^{25/4} \sin(5z\pi) - \dots; \\
\theta_2(z) &= 2q^{1/4} \cos(z\pi) + 2q^{9/4} \cos(3z\pi) + 2q^{25/4} \cos(5z\pi) + \dots; \\
\theta_3(z) &= 1 + 2q \cos(2z\pi) + 2q^4 \cos(4z\pi) + 2q^9 \cos(6z\pi) + \dots
\end{aligned}$$

Из этих формул легко видеть, что функция  $\theta_1(z)$  – нечетная функция, остальные – четные.

Здесь уместно привести *формулы приведения*, связывающие тэта-функции между собой:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= -\theta_2(z + \frac{1}{2}) = -iM\theta_3(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = iM\theta_4(z + \frac{1}{2}\tau); \\
\theta_2(z) &= M\theta_3(z + \frac{1}{2}\tau) = M\theta_4(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = \theta_1(z + \frac{1}{2}); \\
\theta_3(z) &= \theta_4(z + \frac{1}{2}) = M\theta_1(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = M\theta_2(z + \frac{1}{2}\tau); \\
\theta_4(z) &= -iM\theta_1(z + \frac{1}{2}\tau) = iM\theta_2(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = \theta_3(z + \frac{1}{2}),
\end{aligned}$$

где  $M = q^{1/4} \exp(iz\pi)$ .

Эти равенства легко получить, воспользовавшись написанными выше определениями тэта-функций.

### 2.3.4 Нули тэта-функций

Пусть  $z_0$  – какой-нибудь нуль тэта-функции тогда в комплексной плоскости эта тэта-функция обращается в нуль в точках  $z_0 + m + \tau n$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ . На самом деле в ячейке  $z, z + 1, z + \tau + 1, z + \tau$  может быть только один нуль тэта-функции. в этом можно убедиться, посчитав нули тэта-функции внутри ячейки. Обозначим контур, обходящий ячейку  $C$ . Тогда число нулей внутри ячейки можно вычислить с помощью контурного интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_C dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} &= \frac{1}{2i\pi} \int_z^{z+1} dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{z+1}^{z+1+\tau} dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + \\ & \frac{1}{2i\pi} \int_{z+1+\tau}^{z+1} dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{z+1}^z dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{1}{2i\pi} \int_z^{z+1} dt \left( \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)} \right) + \\ & \frac{1}{2i\pi} \int_z^{z+\tau} dt \left( \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+1)}{\theta(t+1)} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_z^{z+1} dt \left( \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - \frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла надо воспользоваться формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\theta'(t+\tau)}{\theta(t+\tau)} &= \frac{-2i\pi \exp(-i\pi(\tau+2z))\theta(t)}{\exp(-i\pi(\tau+2t))\theta(t)} \\ &+ \frac{\exp(-i\pi(\tau+2t))\theta'(t)}{\exp(-i\pi(\tau+2t))\theta(t)} = -2i\pi + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}. \end{aligned}$$

Подставив эту формулу в интеграл получим:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C dt \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = 1.$$

Это означает, что тэта-функция только один раз обращается в нуль внутри контура  $C$ , и этот нуль первого порядка. Функция  $\theta_1(0) = 0$ . Воспользовавшись полученными выше формулами, легко получить:

$$\theta_2(1/2) = 0, \quad \theta_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau\right) = 0 \quad \theta_4\left(\frac{1}{2}\tau\right) = 0.$$

### 2.3.5 Соотношения между квадратами

Здесь наша цель – вывести формулы, связывающие квадраты тэта-функций. Для этого рассмотрим отношение:

$$\phi(z) = \frac{a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z)}{\theta_2^2(z)}.$$

Здесь  $a$  и  $b$  – постоянные, значения которых будут уточнены позже.

Функция  $\phi(z)$  – двоякопериодическая с периодами 1 и  $\tau$ . Постоянные  $a$  и  $b$  выберем так, чтобы в нуле функции  $\theta_2(z)$  – в точке  $z = 1/2$  числитель тоже обращался в нуль. В этом случае функция  $\phi(z)$  может иметь только один нуль первого порядка в своем параллелограмме периодов. Следовательно эта функция ни что иное, как постоянная. Подберем соотношение между  $a$  и  $b$  так, чтобы  $\phi \equiv 1$ . Для этого воспользуемся равенством

$$a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z) = \theta_2^2(z),$$

в точках, где обращаются в нуль функции из левой части этого равенства, то есть при  $z = 0$  и при  $z = \tau/2$ .

$$b\theta_4^2(0) = \theta_2^2(0), \quad a\theta_1^2(\tau/2) = \theta_2^2(\tau/2).$$

Используя формулы, связывающие тэта-функции, можно выразить  $\theta_1^2(\tau/2) = -q^{-1/2}\theta_4^2(0)$  и  $\theta_2^2(\tau/2) = q^{-1/2}\theta_3(0)$ . Для краткости дальше вместо того, чтобы писать  $\theta_k(0)$ , будем писать  $\theta_k$ , подразумевая при этом соответствующую постоянную. Тогда искомая формула, для квадратов тэта-функций имеет вид:

$$\theta_4^2\theta_2^2(z) = \theta_2^2\theta_4^2(z) - \theta_3^2\theta_1^2(z).$$

В этой формуле можно устроить сдвиги на половину периода и еще на половину квазипериода  $\tau$ , на две половины: одну половину квазипериода и одну половину настоящего периода. В результате получится еще три формулы, связывающие квадраты тэта-функций.

Для примера рассмотрим сдвиг на половину квазипериода.

$$\theta_4^2 M^{-2} \theta_3^2(z) = -M^{-2} \theta_2^2 \theta_1^2(z) + M^{-2} \theta_3^2 \theta_4^2(z).$$

Умножив на  $M^2$ , получим:

$$\theta_4^2 \theta_3^2(z) = -\theta_2^2 \theta_1^2(z) + \theta_3^2 \theta_4^2(z).$$

Еще две формулы для квадратов тэта-функций:

$$\theta_2^2 \theta_1^2(z) = \theta_2^2 \theta_3^2(z) - \theta_3^2 \theta_2^2(z),$$

$$\theta_4^2 \theta_4^2(z) = \theta_3^2 \theta_3^2(z) - \theta_2^2 \theta_2^2(z).$$

### 2.3.6 Тэта-функции и функция синус амплитуды

Рассмотрим отношение тэта-функций:  $\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}$ . Легко видеть, что при изменении аргумента тэта-функций на 1 и на  $\tau$ :

$$\frac{\theta_1(z+1)}{\theta_4(z+1)} = \frac{-\theta_1(z)}{\theta_4(z)}; \quad \frac{\theta_1(z+\tau)}{\theta_4(z+\tau)} = \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}.$$

Теми же свойствами обладает и производная этого отношения тэта-функций. С другой стороны, выражение

$$\frac{\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_4^2(z)}$$

имеет такие же свойства периодичности. Тогда

$$\phi(z) = \left( \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} \right)' \frac{\theta_4^2(z)}{\theta_2(z)\theta_3(z)}$$

двойкопериодическая функция. Она имеет простые полюсы в точках, сравнимых с  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ . Для вычисления функции  $\phi(z)$  в точке  $\phi(z + \tau/2)$  можно воспользоваться формулами приведения (см. п.3). Тогда

$$\begin{aligned} \theta_1(z + \tau/2) &= iq^{-1/4} \exp(iz\pi)\theta_4(z), & \theta_4(z + \tau/2) &= iq^{-1/4} \exp(-iz\pi)\theta_1(z), \\ \theta_2(z + \tau/2) &= q^{-1/4} \exp(-iz\pi)\theta_3(z), & \theta_3(z + \tau/2) &= q^{-1/4} \exp(-iz\pi)\theta_2(z). \end{aligned}$$

Тогда  $\phi(z + \tau/2) = \phi(z)$ . То есть, функция  $\phi(z)$  – двойкопериодическая с периодами 1 и  $\tau/2$ . Эта функция в своем параллелограмме периодов может иметь лишь один простой полюс в точке  $1/2$ . Такая функция может быть только постоянной. Значение этой постоянной можно найти, вычислив, например, ее значения в нуле.

$$\phi(z) \equiv \theta_4^2(0).$$

Таким образом получена формула:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} \right) = \theta_4^2 \frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)} \frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}.$$

Теперь удобно обозначить:

$$\xi = \frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}.$$

Уравнение для  $\xi$ :

$$\frac{d\xi}{dz} = (\theta_2^2 - \xi\theta_3^2)(\theta_3^2 - \xi\theta_2^2).$$

От этого уравнения можно перейти к уравнению для функции синус амплитуды:

$$\frac{\xi\theta_3}{\theta_2} = y, \quad z\theta_3^2 = u, \quad \sqrt{k} = \frac{\theta_2}{\theta_3},$$

тогда:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Частное решение этого уравнения:

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{\theta_3 \theta_1(u\theta_3^{-2})}{\theta_2 \theta_4(u\theta_2^{-2})}.$$

Периоды функции синус амплитуды:  $2\theta_3^2$  и  $\tau\theta_3^2$ . Простые полюсы находятся в точках  $\frac{1}{2}\tau\theta_3^2$  и  $\theta_3^2 + \frac{1}{2}\theta_3^2$ .

### 2.3.7 Задача

Написать выражение для функции Вейерштрасса через тэта-функции.

### 2.3.8 Литература

При подготовке к этой лекции использовались учебники:

- 1 Н.И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- 2 Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

## 2.4 Интегрируемые волчки

*В этой лекции приводятся примеры задач из механики, которые решаются с использованием аппарата эллиптических и гиперэллиптических функций. Эти примеры взяты из теории движений твердого тела вокруг неподвижной точки. Это хорошо известные волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. По существу эти примеры, если не считать случай Гесса-Аппельрота (вырождение волчка Ковалевской), исчерпывают интегрируемые движения твердого тела.*

### 2.4.1 Уравнения Эйлера-Пуансо

В этом пункте выведены уравнения Эйлера-Пуансо, определяющие движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Здесь приходится привлекать некоторые простые понятия теоретической механики. Для существа вопроса это кажется очень полезным читателям, знакомым с механикой. С другой стороны, этот пункт можно безболезненно пропустить, если интересоваться только математической стороной вопроса – уравнениями и их решениями.

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в точке. Эту точку будем обозначать  $O$ . С этой точкой свяжем две декартовы системы координат. Одна система координат неподвижна в пространстве. Причем, для простоты будем полагать, что сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси  $Oz'$ . Обозначим эту систему координат  $O, x', y', z'$ . Вторая система координат жестко связана с телом и, следовательно, подвижна в пространстве. Для простоты возьмем эту систему координат такой, что в этой системе тензор инерции тела имеет только диагональные элементы. Подвижную систему координат будем обозначать  $O, x, y, z$ .

Уравнения движения твердого тела получаются из закона сохранения кинетического момента  $K$ :

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{M},$$

где  $\mathcal{M}$  – момент внешних сил (силы тяжести).

Сила тяжести прилагается к центру тяжести тела. Координаты центра тяжести  $(x_g, y_g, z_g)$  в подвижной системе не меняются.

Кинетический момент в неподвижной системе координат вычисляется по формуле:

$$K = \int_M r \times v dM.$$

Интегрирование проводится по всему телу,  $r$  – радиус-вектор точки тела массы  $dM$ ,  $v$  – вектор скорости движения этой точки,  $\times$  означает векторное произведение.

Скорость точки в неподвижной системе координат легко вычисляется через угловую скорость  $\omega$  и радиус-вектор:

$$v = \omega \times r.$$

Эта формула позволяет переписать формулу для кинетического момента через угловую скорость и тензор инерции тела. Мы предполагаем, что система координат, связанная с телом является такой, что тензор инерции тела в этой системе координат имеет диагональный вид:

$$L = \text{diag}(A, B, C).$$



Тогда компоненты кинетического момента:

$$K = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3).$$

Кроме этого, производная кинетического момента по времени в подвижной системе координат имеет вид:

$$\frac{\tilde{d}K}{dt} = -\omega \times K + r_g \times P.$$

Здесь  $r_g$  – координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат,  $P = (Mg\gamma_1, Mg\gamma_2, Mg\gamma_3)$  – координаты силы тяжести, действующей на тело. Числа  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  – косинусы углов между положительными направлениями соответствующих осей подвижной и неподвижной систем координат.

В результате закон изменения кинетического момента тела можно записать в виде:

$$\frac{dK}{dt} = -\omega \times K + r_g \times P.$$

Это векторное уравнение, записанное в виде системы уравнений, имеет вид:

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= Mg(z_g\gamma_2 - y_g\gamma_3), \\ B\frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 &= Mg(x_g\gamma_3 - z_g\gamma_1), \\ C\frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= Mg(y_g\gamma_1 - x_g\gamma_2). \end{aligned}$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Эйлера*. В системе шесть неизвестных – помимо  $\omega_{1,2,3}$  это еще и  $\gamma_{1,2,3}$ . Для  $\gamma_{1,2,3}$  можно получить еще три уравнения. Например, если выразить единичный орт  $k_1$  неподвижной системы координат через его координаты в системе, связанной с телом:

$$\frac{\tilde{d}k_1}{dt} + \omega \times k_1 = 0.$$

Соответствующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Пуансо*.

Совместно уравнения Эйлера-Пуансо определяют движение твердого тела с закрепленной точкой.

Для этих уравнений известны три полных интеграла. Это *интеграл энергии*:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + 2Mgz_g = C_1.$$

*Интеграл площадей* – проекция вектора  $K$  на ось  $Oz$  не изменяется:

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = C_2.$$

*Геометрический интеграл* – сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Для интегрирования уравнений Эйлера-Пуансо достаточно найти еще один первый интеграл, однако, он известен лишь в трех специальных случаях, которые называются волчок Эйлера, волчок Лагранжа и волчок Ковалевской.

### 2.4.2 Волчок Эйлера

Волчок Эйлера – это специальный случай уравнений Эйлера-Пуансона, когда точка закрепления совпадает с центром тяжести тела ( $r_g = 0$ ). В этом случае уравнения Эйлера можно рассматривать отдельно от уравнений Пуансо.

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)\omega_2\omega_3, \\ B\frac{d\omega_2}{dt} &= (C - A)\omega_3\omega_1, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} &= (A - B)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

Порядок этой системы уравнений можно понизить, воспользовавшись двумя первыми интегралами: интегралом энергии

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = C_1$$

и величиной кинетического момента тела (если тело закреплено в центре тяжести, тогда момент силы тяжести, действующей на тело, равен нулю, и кинетический момент тела неизменен):

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = C_2.$$

Здесь удобно перейти от уравнений для компонент угловой скорости к уравнениям для компонент кинетического момента

$$(M_1, M_2, M_3) = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3).$$

В результате систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2M_3(a_2 - a_3), \\ M_2' &= M_3M_1(-a_1 + a_3), \\ M_3' &= M_1M_2(a_1 - a_2), \end{aligned}$$

где  $a_1 = 1/A$ ,  $a_2 = 1/B$ ,  $a_3 = 1/C$ . Будем считать, что оси координат выбраны так, что выполняются неравенства  $a_1 > a_2 > a_3$ .

Интегралы движения примут вид:

$$H(M) = \frac{1}{2}(a_1M^2 + a_2M_2^2 + a_3M_3^2),$$

полный момент импульса:

$$F(M) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Из вида этих интегралов следует, что инвариантное многообразие в трехмерном пространстве – это пересечение эллипсоида  $H = \text{const}$  и сферы  $F = \text{const}$ . Вращение вокруг малой и большой осей устойчиво, а вокруг средней – неустойчиво. Это можно заметить из прямого рассмотрения системы уравнений. Если нарисовать траектории движения, тогда можно заметить, что окрестности вершин средней оси – седла.

Проинтегрируем уравнения движения волчка Эйлера.

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2M_3(a_2 - a_3), \\ \frac{1}{2}(a_1M^2 + a_2M_2^2 + a_3M_3^2) &= h, \\ M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 &= f. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_3^2 &= f - M_1^2 - M_2^2, \\ \frac{1}{2}(a_1M_1^2 + a_2M_2^2 + a_3f - a_3M_1^2 - a_2M_2^2) &= h, \\ (a_1 - a_3)M_1^2 + (a_2 - a_3)M_2^2 &= 2h - a_3f, \\ M_2 &= \frac{1}{a_2 - a_3}(2h - a_3f - (a_1 - a_3)M_1^2), \\ M_3^2 &= f - M_1^2 - \frac{1}{a_2 - a_3}(2h - a_3f - (a_1 - a_3)M_1^2), \\ M_2^2 &= c_1 - c_2M_1^2, \\ M_3^2 &= c_3 - c_4M_1^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(M_1')^2 = (c_1 - c_2 M_1^2)(c_3 - C_4 M_1^2)(a_2 - a_3)^2.$$

От этого уравнения легко перейти к уравнению для эллиптического синуса. Поделим обе части уравнения на  $c_1 c_3 (a_2 - a_3)^2$ . Обозначим  $y = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} M_1$ . После подстановки функции  $y$  в уравнение получим:

$$\frac{1}{c_1 c_3 (a_2 - a_3)^2} (y')^2 = (1 - y^2) \left(1 - \frac{c_4 c_1}{c_3 c_2} y^2\right).$$

Из этого уравнения следует, что функция  $y$  может быть представлена в виде:

$$y = \operatorname{sn} \left( \frac{t}{(a_2 - a_3) \sqrt{c_2 c_3}} \middle| k \right), \quad \text{где } k = \frac{c_4 c_1}{c_3 c_2}.$$

Остальные составляющие кинетического момента также можно выразить через эллиптические функции Якоби.

### 2.4.3 Волчок Лагранжа

Если два статических момента твердого тела равны ( $A = B$ ) и координаты центра тяжести  $x_g = y_g = 0$ , тогда говорят о волчке Лагранжа. Уравнения волчка Лагранжа:

$$\begin{aligned} \omega_1' - m\omega_2\omega_3 &= -\frac{\alpha}{2}\gamma_2, \\ \omega_2' + m\omega_1\omega_3 &= \frac{\alpha}{2}\gamma_1, \\ \omega_3' &= 0, \\ \gamma_1' &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\ \gamma_2' &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\ \gamma_3' &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения  $\alpha = -\frac{2Mgz_g}{A}$ ,  $m = \frac{A-C}{A}$ .

Первые интегралы системы Эйлера-Пуансо, написанные в первой части этой лекции, примут вид:

$$\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 - b\gamma_3 = k_1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \omega_3 = \text{const.}$$

Умножим первое из уравнений Эйлера-Лагранжа на  $\omega_1$ , второе на  $\omega_2$ , сложим получившиеся уравнения, в результате получим:

$$\omega_1\omega_1' + \omega_2\omega_2' = \frac{\alpha}{2}(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1).$$

Легко видеть, что правая часть этого уравнения – ни что иное, как  $\frac{\alpha}{2}\gamma'_3$ . Воспользовавшись этим, уравнение можно проинтегрировать по времени.

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - \alpha\gamma_3 = h.$$

Это еще один первый интеграл уравнений Эйлера-Пуансо для волчка Лагранжа.

Решение уравнений для волчка Лагранжа можно выразить в эллиптических функциях. Легче всего получить уравнение для  $\gamma_3$ . Возведем в квадрат последнее из уравнений Эйлера-Лагранжа. Слагаемое  $-2\omega_1\gamma_2\omega_2\gamma_1$  в правой части заменим, исходя из квадрата первого из выписанных первых интегралов:

$$-2\omega_1\gamma_2\omega_2\gamma_1 = \omega_1^2\gamma_1^2 + \omega_2^2\gamma_2^2 - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

В результате получим уравнение:

$$(\gamma_3)^2 = \omega_1^2\gamma_2^2 + \omega_2^2\gamma_1^2 + \omega_1^2\gamma_1^2 + \omega_2^2\gamma_2^2 - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

Теперь, воспользовавшись выражением для суммы квадратов  $\gamma_k$  и выведенным дополнительным законом сохранения, получим:

$$(\gamma'_3)^2 = (\alpha\gamma_3 + h)(1 - \gamma_3^2) - (k_1 - b\gamma_3)^2.$$

Это уравнение решается в эллиптических функциях.

#### 2.4.4 Волчок Ковалевской

Интегрирование волчка Ковалевской связано с красивыми математическими преобразованиями – так называемым преобразованием Абеля и задачей обращения Якоби. Поэтому, несмотря на громоздкость формул, кажется полезным хотя бы познакомиться с идеями, лежащими в основе интегрирования волчка Ковалевской.

Уравнения волчка Ковалевской получаются из уравнений Эйлера-Пуансо, когда  $A = B = 2C$ ,  $y_g = 0$ ,  $z_g = 0$ . Система координат, связанная с телом, выбирается так, что  $x_g < 0$ . Уравнения Эйлера-Пуансо перепишем для безразмерных переменных:  $p = c_1\omega_1$ ,  $q = c_1\omega_2$ ,  $r = c_1\omega_3$ ,  $c_1t = \tau$ , здесь  $c_1 = \frac{Mg|x_g|}{C}$ . В этих координатах уравнения волчка

Ковалевской имеют вид:

$$\begin{aligned} 2p' &= qr, \\ 2q' &= -pr - \mu\gamma_3, \\ r' &= \mu\gamma_2, \\ \gamma_1' &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \gamma_2' &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \gamma_3' &= q\gamma_3 - p\gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu = \text{const.}$

Есть четыре интеграла движения:

полная энергия

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1,$$

момент импульса

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3,$$

условие связи

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

и интеграл Ковалевской

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2.$$

Рассмотрим поверхность уровня этих интегралов

$$H = 6h, \quad L = 2l, \quad K = k^2.$$

Введем на этой поверхности координаты  $S_1$  и  $S_2$

$$S_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \pm \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

где

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= p \pm iq, \quad R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu l z + \mu^2 - k^2, \\ R(x_1, x_2) &= -x_1^2 x_2^2 + 6hx_1 x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2. \end{aligned}$$

В переменных  $S_{1,2}$  уравнения движения записываются в виде:

$$S_1' = \frac{i\sqrt{P_5(S_1)}}{2(S_1 - S_2)}, \quad S_2' = \frac{i\sqrt{P_5(S_2)}}{2(S_2 - S_1)}, \quad (2.11)$$

где

$$P_5(z) = [z[(z - 3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2]((z - 3h)^2 - k^2).$$

Уравнения для  $S_{1,2}$  интегрируются преобразованием Абеля  $\Gamma \rightarrow J(\Gamma)$ , где  $\Gamma$  – риманова поверхность рода 2:  $w^2 = P_5(z)$ . Это преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \int_{P_0}^{S_1} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \\ \zeta_2 &= \int_{P_0}^{S_1} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}},\end{aligned}$$

где  $P_0$  – фиксированная точка на римановой поверхности. Система уравнений движения (2.11) принимает вид:

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = i.$$

Эти уравнения легко интегрируются, однако, для выяснения поведения решения в исходных переменных необходимо обратить преобразование Абеля. Задачу об обращении гиперэллиптических интегралов называют задачей обращения Якоби. Она решается с использованием тэта-функций. Покажем, что в ситуации общего положения преобразование Абеля локально обратимо. Для этого вычислим якобиан преобразования и покажем, что он не равен нулю.

$$\frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(S_1, S_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{P_5(S_1)}} & \frac{S_1}{\sqrt{P_5(S_1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{P_5(S_2)}} & \frac{S_2}{\sqrt{P_5(S_2)}} \end{vmatrix} = \frac{S_2 - S_1}{\sqrt{P_5(S_1)P_5(S_2)}}.$$

Если  $P_5(S_{1,2}) \neq 0$ , тогда существует обратное преобразование.

### 2.4.5 Задачи

Выразить оставшиеся компоненты решения уравнений Эйлера-Пуансо в случае волчка Эйлера через функции Якоби.

Записать решение уравнений Эйлера-Пуансо в случае волчка Лагранжа через эллиптические функции Якоби.

### 2.4.6 Литература

При подготовке этой лекции использовались:

- 1 Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.

- 2 Б.А.Дубровин. Нелинейные уравнения и тэта-функции. Успехи математических наук, 1981, т.36, п2, с.11-80.



## Глава 3

# Функции Матъё и Ламе

Функции Матъё представляются наиболее сложными из классических специальных функций. Известны их представления в виде сходящихся рядов. Такие представления, конечно, могут быть полезными для исследования локальных свойств. Однако неизвестны явные формулы, например интегральные, как для гипергеометрической функции и ее вырожденных – функций Эйри и Бесселя, позволяющие исследовать их глобальные свойства. Уравнение Ламе близко по свойствам к уравнению Матъё. В специальном случае функции Ламе строятся с помощью эллиптических функций.

### 3.1 Функции Матъё

*Изложена теория Флоке для уравнений с периодическими коэффициентами. Приведены примеры, из математической физики и механики, в которых возникает уравнение Матъё. Дано определение функций Матъё и указан алгоритм их построения.*

#### 3.1.1 Уравнение Хилла и теория Флоке

Здесь мы будем изучать уравнение второго порядка с периодическим коэффициентом:

$$u'' + \left(\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(nx)\right)u = 0. \quad (3.1)$$

Коэффициенты в разложении Фурье периодической функции считаются такими, что ряд Фурье сходится.

Уравнение (3.1) называется уравнением Хилла, который исследовал решения такого уравнения в связи с теорией движения Луны.

Коэффициент уравнения – периодическая функция с периодом  $2\pi$ , поэтому легко видеть, что если функция  $u(x)$  – решение уравнения (3.1), тогда и функция  $u(x + 2\pi)$  – также будет решением этого уравнения. При этом, конечно, функция  $u(x)$  не обязана быть периодической функцией по  $x$ . Например, при изменении на  $2\pi$  она может умножаться на постоянную, или к ней может добавляться еще одно решение уравнения (3.1), не обязательно линейно зависимое от  $u(x)$ . Легко понять, что этим исчерпываются возможные изменения решения за  $2\pi$ . Такой ограниченный набор сценариев позволяет довольно подробно исследовать свойства решений уравнения (3.1), не прибегая к построению явного решения.

Пусть функции  $g(x)$  и  $h(x)$  – составляют фундаментальную систему решений уравнения (3.1), причем, определитель Вронского этой системы равен единице. Такие функции можно подобрать из-за линейности уравнения. Для определенности примем

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1.$$

Общее решение уравнения (3.1) можно выразить в виде:

$$F(x) = Ag(x) + Bh(x),$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные.

Тогда при изменении на период сами функции  $g(x + 2\pi)$  и  $h(x + 2\pi)$  можно выразить через  $g(x)$  и  $h(x)$ :

$$g(x + 2\pi) = \alpha_1 g(x) + \alpha_2 h(x), \quad h(x + 2\pi) = \beta_1 g(x) + \beta_2 h(x).$$

Эти формулы позволяют вывести соотношение для  $\alpha_j, \beta_j$ . Из неизменности вронскиана двух решений уравнения (3.1) следует, что

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1.$$

Легко выразить и общее решение  $F(x + 2\pi)$ :

$$F(x + 2\pi) = (A\alpha_1 + B\beta_1)g(x) + (A\alpha_2 + B\beta_2)h(x).$$

Среди всевозможных линейных комбинаций  $g(x)$  и  $h(x)$ , дающих решение уравнения (3.1), особый интерес представляет такое, что

$$F(x + 2\pi) = kF(x). \tag{3.2}$$

Решение уравнения (3.1), удовлетворяющее этому свойству, называется *функцией Блоха*. Эта функция для уравнения Хилла полезна еще и тем,

что  $v(x) = F(-x)$  – также решение уравнения, причем, если  $k \neq 1$ , тогда  $v(x)$  и  $F(x)$  – пара линейно независимых решений уравнения (3.1).

Если представить  $k = \exp(2\pi\mu)$ , тогда функция  $\phi(x) = \exp(-x\mu)F(x)$  – периодическая. Действительно,  $\phi(x+2\pi) = \exp(-2\pi\mu)F(x+2\pi) = \phi(x)$ .

Условие (3.2) дает систему уравнений для определения  $k, A, B$ :

$$A\alpha_1 + \beta_1 B = kA, \quad A\alpha_2 + B\beta_2 = kB.$$

Эта система уравнений однородна, следовательно, для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю, то есть:

$$(\alpha_1 - k)(\beta_2 - k) - \alpha_2\beta_1 = 0,$$

или

$$k^2 - (\alpha_1 + \beta_2)k + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения.

$$k_{12} = \frac{(\alpha_1 + \beta_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 + \beta_2)^2 - 4}}{2}.$$

Вещественные решения этого уравнения существуют при  $|\alpha_1 + \beta_2| \geq 2$ . Причем, если  $\alpha_1 + \beta_2 = \pm 2$ , тогда  $k = \pm 1$ , и функция Блоха периодическая с периодом  $2\pi$  или  $4\pi$  соответственно.

Если  $|\alpha_1 + \beta_2| > 2$ , тогда одно из значений  $|k| > 1$ , и функция Блоха не ограничена на оси  $x$ .

Значениям  $|\alpha_1 + \beta_2| < 2$  соответствуют комплексные значения  $k$ . Для того, чтобы выяснить, как ведет себя при этом функция Блоха, вычислим  $|k|$ . Числа  $k_1$  и  $k_2$  – комплексно сопряженные. По теореме Виета произведение корней:

$$k_1 k_2 = 1.$$

Это означает, что  $|k_1| = |k_2| = 1$ . Следовательно, решения уравнения Хилла – ограниченные функции на всей вещественной оси.

### 3.1.2 Примеры

Уравнение Матъё обычно записывается в виде:

$$u'' + (a + 16q \cos 2z)u = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение Матъё представляет собой простейшее из уравнений Хилла. Исторически это уравнение появилось при изучении уравнения колебаний пластины:

$$\partial_x^2 V + \partial_y^2 V = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 V.$$

Вывод уравнения Матъё довольно громоздок, и здесь лишь приводятся формулы, воспользовавшись которыми, читатель может самостоятельно прийти к уравнению Матъё.

Прежде всего будем предполагать, что пластина колеблется с постоянной частотой  $p$ , тогда от волнового уравнения можно перейти к уравнению Гельмгольца:

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v + \frac{p^2}{c^2} v = 0.$$

Теперь от декартовых координат перейдем к эллиптическим:

$$x + iy = h \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad \text{или} \quad x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

где  $(\pm h, 0)$  – фокусы эллиптической мембраны. Конечно, в этих координатах  $\xi \geq 0$ ,  $-\pi < \eta \leq \pi$ , в новых переменных уравнение Гельмгольца примет вид:

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + \frac{h^2 p^2}{c^2} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0.$$

Теперь легко разделить переменные:

$$u = F(\xi)G(\eta).$$

В результате для функции  $G(\eta)$  получается уравнение Матъё:

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} + \left( A - \frac{h^2 p^2}{c^2} \cos^2 \eta \right) G = 0.$$

Уравнение (3.3) получится, если принять  $a = A - \frac{h^2 p^2}{2c^2}$ ,  $q = \frac{h^2 p^2}{32c^2}$ .

По сути построения – решение – периодическая функция по  $\eta$ . Поэтому в задаче, связанной с колебаниями эллиптической мембраны, надо найти такие значения параметра  $a$ , при которых существуют периодические решения уравнения Матъё с периодом  $2\pi$ .

Ещё один пример, в котором возникает уравнение Матъё – математический маятник с периодически колеблющейся точкой подвеса, если точка подвеса колеблется в вертикальном положении по закону  $\cos \Omega t$  с амплитудой  $A$ . Уравнение математического маятника в этом случае можно записать в виде:

$$(mg + A \cos \Omega t) \sin \phi + ml\phi'' = 0$$

или

$$\theta'' + \left( \frac{g}{l} + \frac{a}{l} \cos \Omega t \right) \sin \theta = 0.$$

Если рассматривать малые колебания маятника в окрестности нижнего положения равновесия, тогда получим:

$$u'' + (1 + q \cos \Omega t)u = 0.$$

В окрестности верхнего положения равновесия уравнение математического маятника:

$$u'' - (1 + q \cos \Omega t)u = 0.$$

Таким образом, уравнение Матъё определяет устойчивость положений равновесия математического маятника. В этом случае нас будет интересовать вопрос о том, есть ли растущие решения уравнения Матъё при данных значениях параметров уравнения.

### 3.1.3 Функции Матъё

Уравнение Матъё

$$u'' + (a + 16q \cos 2z)u = 0$$

при  $q = 0$  и  $a = n^2$  имеет периодические решения с периодом  $2\pi$  вида:

$$\begin{array}{cccc} 1 & \cos z & \cos 2z & \dots \\ \sin z & \sin 2z & \dots & \dots \end{array}$$

Решения уравнения Матъё, приводящие при  $q \rightarrow 0$  к выше перечисленным косинусам и синусам, называются *функциями Матъё порядка*  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для этих функций приняты обозначения:

$$\begin{array}{cccc} ce_0(z, q) & ce_1(z, q) & ce_2(z, q) & \dots \\ se_1(z, q) & se_1(z, q) & \dots & \dots \end{array}$$

Приведенное определение не обеспечивает однозначное построение функций Матъё. Здесь для однозначности необходимо добавить требование, чтобы коэффициент Фурье-разложения функции Матъё  $n$ -го порядка при  $\cos(nz)$  или  $\sin(nz)$  равнялся единице (не зависел от  $q$ ).

Здесь надо заметить, что параметр  $a$  зависит от  $q$  и лишь при  $q = 0$   $a = n^2$ . Зависимость  $a$  от  $q$  можно определить при построении функции Матъё соответствующего порядка. Алгоритм построения этих функций приведен в следующем пункте.

Из приведенной выше теории Флоке следует, что функции Матъё – специальные периодические решения уравнения Матъё, да еще и со специальными значениями параметров. Линейно независимое к функции Матъё решение уравнения Матъё – кроме случая  $q = 0$  – оказывается решением с линейно растущей амплитудой колебаний.

### 3.1.4 Построение функций Матъё

Будем искать функцию  $ce_0(z, q)$  в виде:

$$ce_0(z, q) = 1 + qv_1(z) + q^2v_2(z) + \dots \quad (3.4)$$

Параметр  $a$ :

$$a = a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots \quad (3.5)$$

Подставим представления (3.4) и (3.5) в уравнение Матъё и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $q$ . В результате получится рекуррентная последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} v_1'' + a_1 + 16 \cos(2z) &= 0, \\ v_2'' + a_2 + a_1v_1 + 16v_1 \cos(2z) &= 0, \\ v_3'' + a_3 + a_1v_2 + a_2v_1 + 16v_2 \cos(2z) &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Решение уравнения для  $v_1$ :

$$v_1 = -\frac{a_1z^2}{2} + 4 \cos(2z) + c_1z + c_0.$$

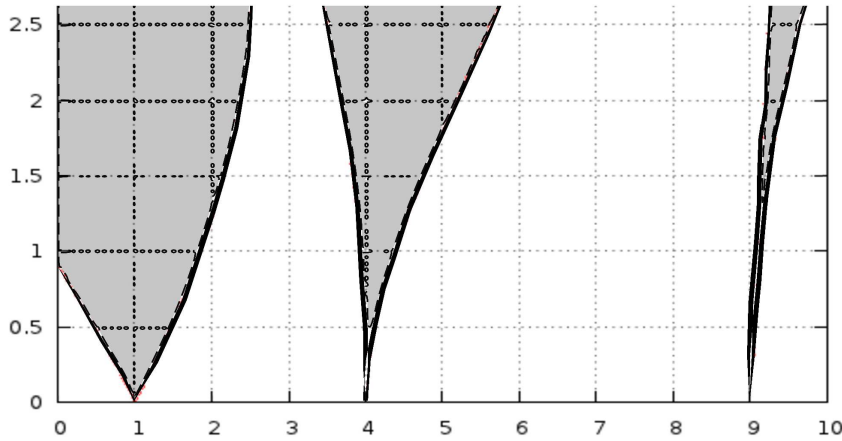


Рис. 3.1: На графике по вертикальной оси откладывается параметр  $q$ , по горизонтальной – параметр  $a$ . Серые зоны – области, в которых амплитуда колебаний одного из решений уравнения Матъё экспоненциально растет. Границы зон – значения параметров при которых строятся функции Матъё.

Нас интересует периодическое решение, поэтому  $a_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ . Кроме того, это решение не должно содержать слагаемых, которые дают вклад в нулевой коэффициент разложения Фурье функции  $ce_0(z, q)$ , поэтому и  $c_0 = 0$ . Окончательно:

$$v_1 = 4 \cos(2z).$$

Уравнение для  $v_2$  в этом случае упрощается:

$$v_2'' = -a_2 - 64 \cos^2(2z)$$

или

$$v_2'' = -a_2 - 32 - 32 \cos(4z).$$

Интересующее нас решение имеет вид:

$$v_2 = -\frac{a_2 + 32}{2} z^2 + 2 \cos(4z).$$

Требование периодичности приводит к условию:

$$a_2 = -32.$$

Уравнение для  $v_3$ :

$$v_3'' = 128 \cos(2z) - 32 \cos(4z) \cos(2z).$$

После применения тригонометрической формулы

$$\cos(2z) \cos(4z) = \frac{1}{2} (\cos(2z) + \cos(6z))$$

и решения уравнения получим:

$$v_3 = -64 \cos(2z) + \frac{16}{9} \cos(6z).$$

параметр  $a_3 = 0$ .

С помощью приведенного алгоритма можно построить функцию Матъё в виде ряда по степеням  $q$  и определить  $a$ , также в виде ряда по степеням  $q$ . Оказывается – здесь это не доказывается – построенные таким образом ряды сходятся, и функции Матъё – целые функции параметра  $z$ .

Построенные несколько членов ряда для  $ce_0(z, q)$ :

$$ce_0(z, q) = 1 + (4q - 64q^2 + \dots) \cos(2z) + \\ (2q^2 + \dots) \cos(4z) + \left( \frac{16}{9} q^3 + \dots \right) \cos(6z) + \dots, \\ a = -32q^2 + \dots$$

Для справки приведем формулы для функций  $ce_1(z, q)$  и  $se_1(z, q)$ :

$$ce_1(z, q) = \cos(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} - \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} + \frac{2^r q^{r+1}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3}) \right) \cos((2r+1)z),$$

где

$$a = 1 - 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3}q^4 + O(q^5).$$

$$se_1(z, q) = \sin(z) + \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} + \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} + \frac{2^r q^{r+1}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3}) \right) \sin((2r+1)z),$$

где

$$a = 1 + 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3}q^4 + O(q^5).$$

### 3.1.5 Уравнение Матьё в форме Линдемана

Если сделать тригонометрическую замену независимой переменной:  $\xi = \cos^2(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \frac{d\xi}{dz} \frac{d}{d\xi} = -2 \cos(z) \sin(z) \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{d^2}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( -\sin(2z) \frac{d}{d\xi} \right) = \sin^2(2z) \frac{d^2}{d\xi^2} - 2 \cos(2z) \frac{d}{d\xi}, \\ \sin^2(2z) &= 4\xi(1-\xi); \quad \cos(2z) = \xi - (1-\xi) = 2\xi - 1. \end{aligned}$$

Уравнение Матьё примет вид:

$$4\xi(1-\xi) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2(1-2\xi) \frac{du}{d\xi} + (a - 16q + 32q\xi)u = 0.$$

Это уравнение имеет две регулярных особых точки  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Точка  $\xi = \infty$  — существенно особая точка этого уравнения. В окрестности регулярных особых точек можно построить по два линейно независимых решения этого уравнения, как это было сделано для гипергеометрической функции. Для этих решений также можно развить подобие теории Флоке, если рассматривать их на соответствующей римановой поверхности.



### 3.1.6 Задача

Выяснить, существуют ли такие значения  $q$  и  $\Omega$ , при которых оказывается устойчивым верхнее положение математического маятника с осциллирующей точкой подвеса.

### 3.1.7 Литература

При подготовке этой лекции использовался учебник

- 1 Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

## 3.2 Уравнение Ламе

*Приводится вид уравнения Ламе и кратко объясняется происхождение и общий вид функций Ламе. Основное внимание уделено решению уравнения Ламе в специальном случае в терминах эллиптического синуса Якоби.*

### 3.2.1 Уравнение Ламе

Уравнением Ламе обычно называется уравнение вида

$$4\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \frac{d}{d\lambda} \left[ \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right] = [n(n+1)\lambda + C]\Lambda.$$

Это уравнение появляется при переходе к эллипсоидальным координатам и разделении переменных в уравнении Лапласа. Здесь параметры  $a, b, c$  – параметры эллипсоидальной системы координат. Числа  $n$  и  $C$  – параметры самого уравнения Ламе.

Классическая теория уравнения Ламе и функций Ламе связана с эллипсоидальной заменой переменных, поэтому как и в случае уравнения Матъё, в этой теории рассматриваются не все решения уравнения Ламе с произвольными значениями параметров (такое уравнение называется обобщенным уравнением Ламе), а уравнения со специально подобранными коэффициентами  $C$  и натуральными значениями параметра  $n$ . Оказывается, что для любого натурального значения  $n$  можно так подобрать  $1 + n/2$  значений коэффициентов  $C$ , что для уравнения Ламе с каждым из таких  $C$  можно построить решение в виде полинома по  $\lambda$  степени  $n$ .

Такие решения называются функциями Ламе, а уравнения с такими и только такими специальными значениями  $C$  называются уравнениями Ламе.

Уравнение Ламе можно переписать в виде, содержащем эллиптическую функцию Вейерштрасса. Для этого надо сделать замену независимой переменной:

$$\lambda = \mathcal{P}(u) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

тогда:

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = (n(n+1)\mathcal{P}(u) + B)\Lambda,$$

где

$$B = C - \frac{1}{3}n(n+1)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ещё одна форма записи уравнения Ламе использует функцию дельта амплитуды (эллиптический синус).

$$\alpha = iK' + u\sqrt{e_1 - e_3}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - c^2}},$$

где  $e_1 > e_2 > e_3$  – корни уравнения  $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$  (параметры  $g_2$  и  $g_3$  определяют функцию Вейерштрасса), тогда

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = (n(n+1)k^2\operatorname{sn}(\alpha|k) + A)\Lambda,$$

где

$$B + e_3n(n+1) = A(e_1 - e_3).$$

### 3.2.2 Алгоритм построения функций Ламе

Для построения функций Ламе первого рода – решений уравнения Ламе в форме Вейерштрасса используют метод неопределенных коэффициентов. Решение уравнения ищут в виде многочлена степени  $N$  от функции Вейерштрасса:

$$\Lambda(u) = E_N(u) \equiv \mathcal{P}^N(u) + a_1\mathcal{P}^{N-1}(u) + \dots + a_{N-1}\mathcal{P}(u) + a_N.$$

Вторая производная  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \Lambda'' = & [n(n-1)\mathcal{P}^{n-2}(u) + a_1(n-1)(n-2)\mathcal{P}^{n-3}(u) + \dots + a_{N-2}] \times \\ & \times [4\mathcal{P}^3(u) - g_2\mathcal{P}(u) - g_3] + \\ & [n\mathcal{P}^{N-1}(u) + a_2(N-1)\mathcal{P}^{N-2}(u) + \dots + a_{N-1}] [6\mathcal{P}^2(u) - g_2/2]. \end{aligned}$$

Теперь, если приравнять выражение для второй производной к правой части уравнения Ламе, легко видеть, что и слева и справа содержатся полиномы одинаковых степеней по  $\mathcal{P}(u)$ . Приравнивая коэффициенты в старшем порядке, получим:

$$4N(N-1) + 6N = n(n+1) \quad \text{или} \quad 2N(2N+1) = n(n+1).$$

Отсюда получается, что  $n = 2N$ .

Для вычисления коэффициентов при остальных  $N+1$  (начиная с нулевой) степенях  $\mathcal{P}(u)$  у нас имеется  $N$  свободных параметров  $a_j$  и еще один параметр  $B$  в уравнении. Эти параметры можно подобрать так, что функция  $E_n(u)$  будет решением уравнения Ламе.

### 3.2.3 Специальный случай уравнения Ламе

Рассмотрим уравнение Ламе в форме Якоби:

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = (n(n+1)k^2\text{sn}^2(\alpha|k) + A)\Lambda.$$

Здесь нас будет интересовать специальный, когда уравнение Ламе получается линеаризацией на ненулевом решении уравнения для функции  $\text{sn}(t)$ .

Покажем, как получается линеаризованное уравнение. Уравнение второго порядка, которому удовлетворяет функция  $\text{sn}(t|k)$  имеет вид:

$$u'' = -(1+k^2)u + 2k^2u^3.$$

Будем решение этого уравнения искать в виде:

$$u(t) = \text{sn}(t|k) + \varepsilon v(t).$$

Если подставить эту формулу в уравнение для  $u$ , выписать уравнения для коэффициентов при  $\varepsilon^j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , тогда уравнение при  $\varepsilon^0$  выполняется тождественно, а при  $\varepsilon$  получим уравнение:

$$v'' = (6k^2\text{sn}^2(t|k) - (1+k^2))v. \quad (3.6)$$

Это уравнение и называется линеаризованным уравнением. Оно является специальным случаем уравнения Ламе (здесь  $n = 2$ ).

Одно из решений уравнения (3.6) легко получить, продифференцировав решение нелинейного уравнения – уравнения для эллиптического синуса:

$$v_1(t|k) = \frac{d}{dt}\text{sn}(t|k) = \text{cn}(t|k)\text{dn}(t|k). \quad (3.7)$$

Второе линейно независимое решение уравнения (3.6) получается, исходя из свойства независимости от  $t$  вронскиана двух решений уравнения (3.6):

$$W(v_1, v_2) = v_1 v_2' - v_2 v_1' = \text{const.}$$

Будем искать такое второе решение, что вронскиан  $W(v_1, v_2) = 1$ . Тогда формулу для вронскиана можно рассматривать как дифференциальное уравнение для неизвестной функции  $v_2(t)$ . Воспользовавшись методом вариации постоянных, легко получить формулу для  $v_2$ :

$$v_2(t) = v_1(t) \int_0^t \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)}$$

или

$$v_2(t) = \text{cn}(t)\text{dn}(t) \int_0^t \frac{d\tau}{(1 - \text{sn}^2(\tau))(1 - k^2 \text{sn}^2(\tau))}. \quad (3.8)$$

Найденная формула для решения  $v_2(t)$  пригодна только до тех пор, пока знаменатель не обратится в нуль, то есть, при  $-K(k) < t < K(k)$ . В точках  $t_m = (2m + 1)K$  функция  $\text{cn}(t) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(t)}$  имеет нуль первого порядка. Следовательно, подынтегральная функция в таких точках имеет полюс второго порядка, и интеграл, интервал интегрирования которого включает точки  $t_m$ , не существует.

Формулу (3.8) можно использовать и на всей оси  $t$ , однако, для этого надо регуляризовать расходящийся интеграл. Регуляризовать его можно, например, следующим образом.

$$\begin{aligned} \int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)} &= - \int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{1}{v_1'(\tau)} d\left(\frac{1}{v_1(\tau)}\right) = - \frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)} \Big|_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} - \\ &\quad - \int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{v_1''(\tau)d\tau}{v_1(\tau)(v_1'(\tau))^2} = - \frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)} \Big|_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} - \\ &\quad - \int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{6k^2 \text{sn}^2(\tau) - (1 + k^2)}{(v_1'(\tau))^2} d\tau \end{aligned}$$

или

$$\int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{d\tau}{v_1^2(\tau)} = - \frac{1}{v_1(\tau)v_1'(\tau)} \Big|_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} - \int_{t_m - \delta}^{t_m + \delta} \frac{6k^2 \text{sn}^2(\tau) - (1 + k^2)}{(v_1'(\tau))^2} d\tau,$$

где  $\delta < K(k)$ .

Таким образом, формулы (3.7) и (3.8) дают два линейно независимых решения уравнения (3.6).

**Замечание.** Если таким образом регуляризовать интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)},$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{dt}{\cos^2(t)} + \frac{1}{\sin(t) \cos(t)} \Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \frac{-dt}{\sin^2(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} \frac{dt}{\cos^2(t)} + \frac{1}{\sin(t) \cos(t)} \Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} + \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} \frac{-dt}{\sin^2(t)} + \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\ &= \operatorname{tg}(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \frac{1}{\sin(t) \cos(t)} \Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \operatorname{ctg}(t) \Big|_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} + \operatorname{tg}(t) \Big|_{-\frac{3\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} + \\ &\frac{1}{\sin(t) \cos(t)} \Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} + \operatorname{ctg}(t) \Big|_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} = 2 \operatorname{ctg}(\delta) - \frac{2}{\sin(\delta) \cos(\delta)} - \\ &- 2 \operatorname{tg}(\delta) + 2 \operatorname{ctg}(\delta) - \frac{2}{\sin(\delta) \cos(\delta)} + 2 \operatorname{tg}(\delta) \end{aligned}$$

или

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t)} = 4 \frac{\cos^2(\delta) - 1 + \sin^2(\delta)}{\sin(\delta) \cos(\delta)} = 0.$$

### 3.2.4 Вырожденный случай

Особый интерес представляет случай, когда  $k = 1$ . При этом эллиптический синус вырождается в  $\tanh(t)$ . Линеаризованное уравнение (уравнение Ламе) принимает вид:

$$v'' = (6 \tanh^2(t) + 2)v.$$

Решение  $v_1(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}$ . Второе решение линеаризованного уравнения получается из формулы для  $v_2(t)$ :

$$v_2(t) = \frac{1}{16 \cosh^2(t)} \left( \frac{1}{2} \sinh(t) + 4 \sinh(2t) + 6t \right).$$

**Замечание.** Решение уравнения эллиптического синуса при  $k = 1$  отделяет область периодических решений связанного с этим уравнением

уравнения математического маятника от области неперiodических решений. Это особое решение называется *сепаратрисой*. Тот факт, что линеаризованное на сепаратрисе уравнение имеет экспоненциально растущее решение  $v_2(t)$ , указывает на неустойчивость по Ляпунову сепаратрисного решения.

### 3.2.5 Литература

Подробнее о функциях Ламе можно прочитать в  
Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон, Курс современного анализа. Том 2, М.: Физматгиз, 1967.

Регуляризация интеграла в во втором решении линеаризованного уравнения взята из статьи

М.В. Федорюк, Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка. Журн. Выч. Матем. и Мат. Физ., 1986, т.26, п2, с.198-210.



Научное издание

Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и  
молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в  
естествознании»

Монография

**Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными  
функциями**

**О.М. Киселев**

Редактор Г.Г. Синайская  
Корректор А.И. Николаева

Лицензия на издательскую деятельность  
Подписано в печать  
Бумага офсетная. Формат 60x84/16. Гарнитура Times.  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.  
Тираж . Изд. № . Заказ .  
Цена договорная.