

При изучении авторезонанса в нелинейном осцилляторе с осциллирующей внешней силой:

$$u''_{\tau\tau} + u - Cu^3 = \varepsilon F \cos(\omega\tau), \quad \omega = (1 - \delta\tau)$$

при малых  $u$ :

$$u \sim \varepsilon^{1/3} \Psi(t) \exp(i(\tau - t^2)) + c.c., \quad t = \varepsilon^{2/3} \tau.$$

для  $\Psi$  возникает уравнение главного резонанса:

$$i\Psi' + (t - |\Psi|^2)\Psi = f$$

$$C = -2\sqrt{2}, \quad f = F/(4\sqrt{2}).$$

# Уравнение главного резонанса в различных формах

- Чириков – при изучении нелинейного резонанса.

# Уравнение главного резонанса в различных формах

- Чириков – при изучении нелинейного резонанса.
- Синклер и др. – в задаче о захвате спутников в системе Сатурна.

# Уравнение главного резонанса в различных формах

- Чириков – при изучении нелинейного резонанса.
- Синклер и др. – в задаче о захвате спутников в системе Сатурна.
- Нейштадт и др. – в задачах о переходах через сепаратрису и их приложениях к задачам о захвате в резонанс частиц в магнитосфере Земли.

# Уравнение главного резонанса в различных формах

- Чириков – при изучении нелинейного резонанса.
- Синклер и др. – в задаче о захвате спутников в системе Сатурна.
- Нейштадт и др. – в задачах о переходах через сепаратрису и их приложениях к задачам о захвате в резонанс частиц в магнитосфере Земли.
- Фридланд, Меерсон и др. – в массе приложений к различным физическим явлениям.

# Уравнение главного резонанса в различных формах

- Чириков – при изучении нелинейного резонанса.
- Синклер и др. – в задаче о захвате спутников в системе Сатурна.
- Нейштадт и др. – в задачах о переходах через сепаратрису и их приложениях к задачам о захвате в резонанс частиц в магнитосфере Земли.
- Фридланд, Меерсон и др. – в массе приложений к различным физическим явлениям.
- Калякин – с точки зрения асимптотик при больших значениях независимой переменной.

# Уравнение главного резонанса

$$i\Psi' + (t - |\Psi|^2)\Psi = f$$

имеет двухпараметрическое семейство решений при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\Psi \sim R \exp\left(i\left(\frac{t^2}{2} - R^2 t + A\right)\right), \quad \forall R, A.$$

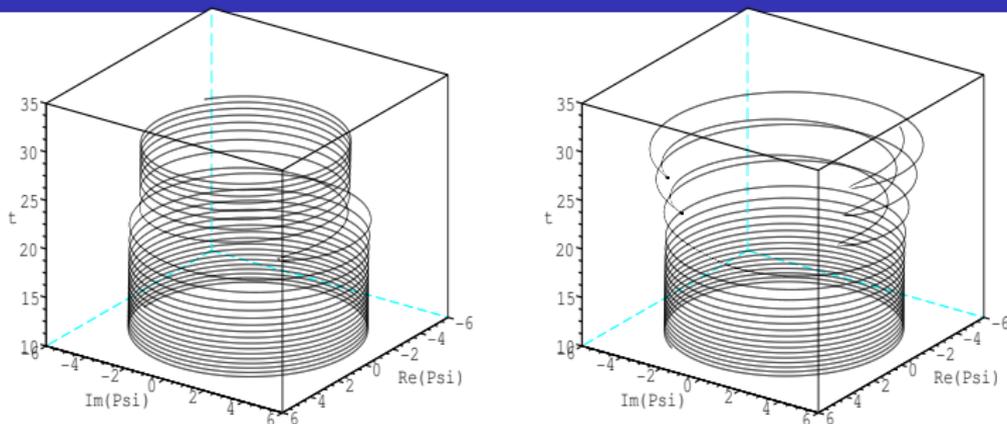
При  $t \rightarrow \infty$  есть два двухпараметрических семейства решений (Л.А. Калякин, 2003). Семейство осциллирующих решений:

$$\Psi \sim r \exp\left(i\left(\frac{t^2}{2} - r^2 t + a\right)\right), \quad \forall r, a$$

и семейство растущих решений:

$$\Psi \sim \sqrt{t} + \dots$$

# Незахваченное и захваченное решения



**Рис. :** Решения задачи Коши слева –  $\Psi|_{t=0} = 5 \exp(2i)$ , справа  $\Psi|_{t=0} = 5 \exp(2.2i)$ . Вблизи  $t = 25$  происходит перестройка траектории – разворот направления вращения и переход к спирали меньшего радиуса (слева), либо к бананообразным колебаниям вокруг центра, медленно удаляющегося от начала координат (слева). Обе задачи Коши решены численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0.0001.

# Структура начальных данных $\Psi_{t=0}$ семейства решений задач Коши (следуя ЛА Калякину и РН Гарифуллину)

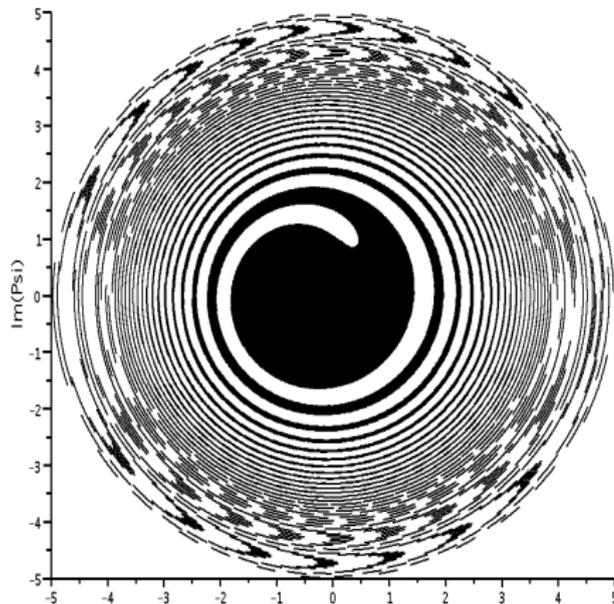


Рис. :  $|\Psi|_{t=0} \in [0, 5]$  с шагом 0.01  $\arg(\Psi)|_{t=0} \in [0, 2\pi)$  с шагом  $2\pi/2048$ . Захватываемые на  $t \in [0, 30]$  в резонанс – черные, незахватываемые – белые.

# Постановка задачи

При захвате в резонанс решений с большой амплитудой в асимптотике происходит переход траектории полной системы через сепаратрису уравнения для главного члена. В подобных случаях возникает "сложная динамика" и, опираясь на известные подходы, может быть вычислена вероятность захвата траектории в резонанс.

Здесь предлагается другая постановка.

- Найти параметры асимптотического решения при  $t \rightarrow -\infty$ , в которых множества ограниченных и растущих решений при  $t \rightarrow \infty$  определены регулярно по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Результаты. Асимптотика при $t \rightarrow -\infty$

Пусть  $0 < \varepsilon \ll 1$  тогда при  $t < -\varepsilon^{-2}$  двухпараметрическое семейство асимптотических решений с большой амплитудой:

$$\Psi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^3 r(\varepsilon^2 t, \varepsilon)) \exp i \left( -\varepsilon^{-2} t + \frac{t^2}{2} - \frac{2f}{\varepsilon} + \varphi + \varepsilon^2 a(\varepsilon t, \varepsilon) \right),$$

$$r(\varepsilon^2 t, \varepsilon) \sim - \frac{f \cos \left( -\varepsilon^{-2} t + \frac{t^2}{2} - \frac{2f}{\varepsilon} + \varphi + \varepsilon^2 a(\varepsilon t, \varepsilon) \right)}{1 - \varepsilon^2 t},$$

$$a(\varepsilon^2 t, \varepsilon) \sim \frac{f^2(2\varepsilon^2 t - 1)}{(1 - \varepsilon^2 t)^2}.$$

Величины  $\varepsilon$  и  $\varphi$  – параметры асимптотики.

Результат. Множество параметров для растущих асимптотических решений в терминах  $\phi$ ,  $R = \varepsilon^{-1}$

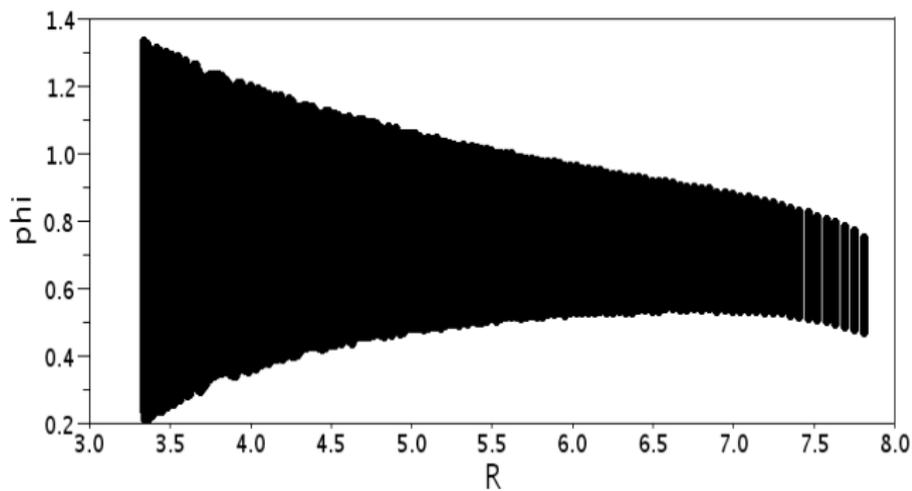


Рис. : Множество параметров  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  для траекторий захваченных в резонанс.

# Результат. Ширина области захвата $\varphi$ от $\varepsilon$

Асимптотика для ширина области захвата:  $\Delta\varphi \sim \frac{8\sqrt{2f}}{3} \varepsilon^{5/2}$ .

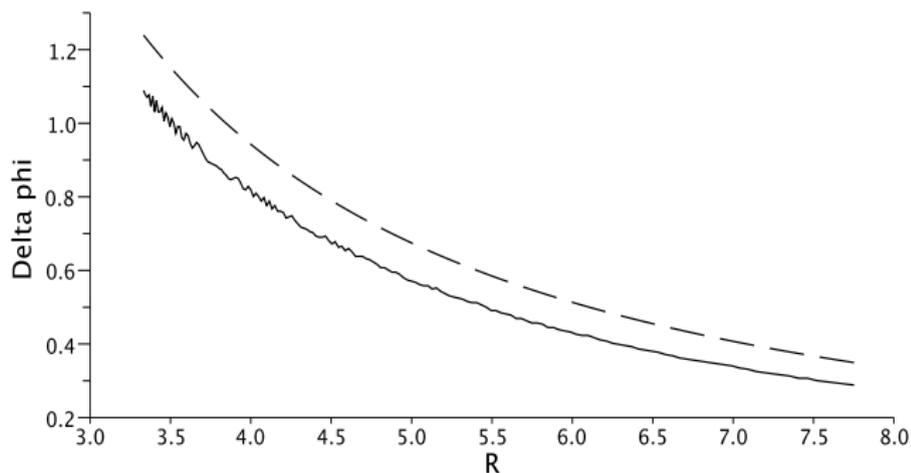


Рис. : Численные значения  $\Delta\varphi$  – ширины интервала для  $\varphi$  захваченных решений в зависимости от  $R = \varepsilon^{-1}$ . Пунктирная линия – результат асимптотических вычислений.

# Результат. Ограниченные решения

Семейство решений при  $t > \varepsilon^{-2}$ :

$$\Psi(t, \varepsilon_+) = \varepsilon_+^{-1} (1 + \varepsilon_+^3 r(\varepsilon_+^2 t, \varepsilon_+)) \exp i \left( -\varepsilon_+^{-2} t + \frac{t^2}{2} + \varphi_+ + \varepsilon_+^2 a(\varepsilon_+^2 t, \varepsilon_+) \right),$$

где  $\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^{3/2} r^+}$ , при  $r^+ \sim \frac{1}{4} \mathcal{I}$ , и  $\varphi_+ \sim \varphi + \frac{1}{8\varepsilon} \mathcal{I}^2$ .

$$r(\varepsilon_+^2 t, \varepsilon_+) \sim - \frac{f \cos \left( -\varepsilon_+^{-2} t + \frac{t^2}{2} + \varphi_+ + \varepsilon_+^2 a(\varepsilon_+^2 t, \varepsilon_+) \right)}{1 - \varepsilon_+^2 t},$$

$$a(\varepsilon_+^2 t, \varepsilon_+) \sim \frac{f^2 (2\varepsilon_+^2 t - 1)}{(1 - \varepsilon_+^2 t)^2} + \varphi_+,$$

здесь  $\mathcal{I} = \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sqrt{8f \sin(\bar{\alpha} + z/(4\varepsilon)) \sin(-z/(4\varepsilon))} + z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz$ ,  $\bar{\alpha}$  -

наибольший из корней уравнения  
 $8f \sin(\bar{\alpha} + z/(4\varepsilon)) \sin(z/(4\varepsilon)) = z$ .

# Внешняя асимптотика

Решение с большой амплитудой

$$\Psi = \varepsilon^{-1} \psi(s, \varepsilon), \quad s = \varepsilon^2 t - 1.$$

Уравнение

$$\varepsilon^{-4} \psi' + (s + 1 - |\psi|^2) \psi = \varepsilon^3 f.$$

Асимптотическое решение задачи рассеяния при  $s < 0$

$$\psi(s, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon^3 r(s, \varepsilon)) \exp \left( i \left( \frac{s^2}{2\varepsilon^4} + \varepsilon^2 a(s, \varepsilon) \right) \right). \quad (1)$$

Здесь

$$r(s, \varepsilon) \sim - \frac{f \cos \left( \frac{s}{2\varepsilon^4} + \varepsilon^2 a(\varepsilon^2 t, \varepsilon) \right)}{s},$$
$$a(s, \varepsilon) \sim \frac{f^2 (2s + 1)}{s^2} + a^-.$$

Параметры решения:  $\varepsilon$  и  $a^-$ .

# Несколько слов о внешних асимптотиках

- Асимптотическая подстановка – переход к переменным типа действие-угол.

# Несколько слов о внешних асимптотиках

- Асимптотическая подстановка – переход к переменным типа действие-угол.
- Независимые переменные делятся на быструю  $\varepsilon^{-4}s^2/2$  и медленную  $s$ .

# Несколько слов о внешних асимптотиках

- Асимптотическая подстановка – переход к переменным типа действие-угол.
- Независимые переменные делятся на быструю  $\varepsilon^{-4}s^2/2$  и медленную  $s$ .
- С помощью метода усреднения по быстрой переменной можно построить формальное решение в виде рядов для  $r$  и  $a$ .

# Несколько слов о внешних асимптотиках

- Асимптотическая подстановка – переход к переменным типа действие-угол.
- Независимые переменные делятся на быструю  $\varepsilon^{-4}s^2/2$  и медленную  $s$ .
- С помощью метода усреднения по быстрой переменной можно построить формальное решение в виде рядов для  $r$  и  $a$ .
- Формальные ряды оказываются асимптотическими при  $\varepsilon^{-1}s \gg 1$ .

# Область параметров для захваченных решений

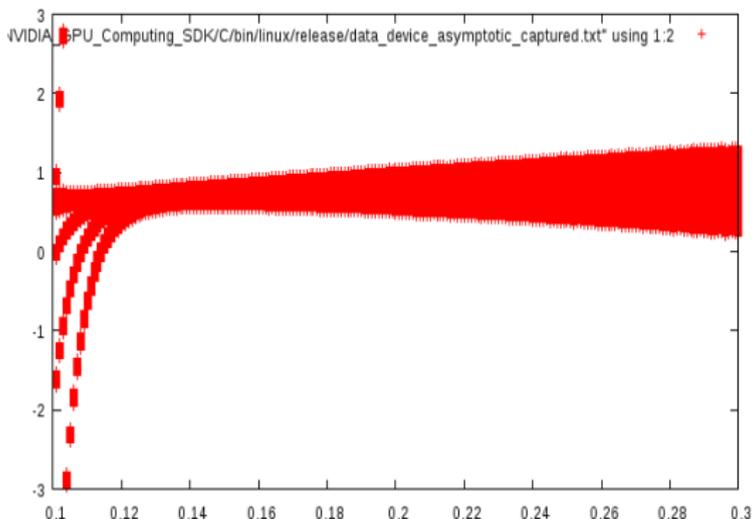


Рис. : В прямоугольнике  $a \in [-\pi, \pi)$ ,  $\varepsilon \in [0.1, 0.3]$  красным отмечены области начальных данных для захваченных решений.

## Как построена область захваченных решений

На отрезке  $t \in [-\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-2}3/2]$  решалось семейство задач Коши с начальными условиями при  $t_0 = -\varepsilon^{-2}$ , зависящими от параметра  $N = 0, \dots, 2048$ .

$$\Psi|_{t_0} = \varepsilon^{-1} R(S, \varepsilon) \exp(i\alpha(s, \varepsilon)), \quad s = \varepsilon^2 t_0 - 1, \quad S = \frac{s^2}{2\varepsilon} + \phi_N,$$

$$\phi_N = 2\pi(i - N/2)/N - \frac{2f}{\varepsilon};$$

$$\alpha = S + \varepsilon^2 \left( \frac{f^2(2s+1)}{s^2} - \varepsilon \frac{f(s+2)\sin(S)}{s^2} \right);$$

$$R(S, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^3 \left( \frac{f \cos(S)}{s} + \varepsilon^2 \frac{f^3 \sin(S)(-2s-1)}{s^3} + \varepsilon^3 \left( \frac{-f^2(2+s)\cos(2S)}{4s^3} + \frac{f^2}{4s^2} + \frac{f^2}{s^3} \right) \right);$$

# Уравнение для внутренней асимптотики

Пусть

$$\Psi(t, \varepsilon) = (1 + \varepsilon^{3/2} \rho(\theta, \varepsilon)) \exp(i\alpha(\theta, \varepsilon)), \quad \theta = s\varepsilon^{-5/2},$$

тогда  $\rho$  и  $\alpha$  удовлетворяют системе:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -2\rho + \varepsilon\theta - \varepsilon^{3/2} \left( \rho^2 + \frac{f \cos(\alpha)}{1 + \varepsilon^{3/2} \rho} \right), \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -f \sin(\alpha).$$

В главном это интегрируемая система

$$\frac{d\alpha_0}{d\theta} = -2\rho + \varepsilon\theta, \quad \frac{d\rho_0}{d\theta} = -f \sin(\alpha_0),$$

эквивалентная уравнению маятника с внешним моментом:

$$\alpha_0'' - 2f \sin(\alpha_0) = \varepsilon.$$

# Расщепление сепаратрис и захват в резонанс

- В окрестности седла происходит расщепление сепаратрис полной системы.

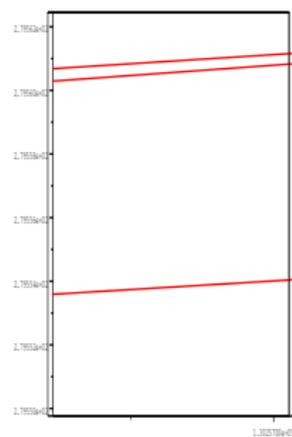
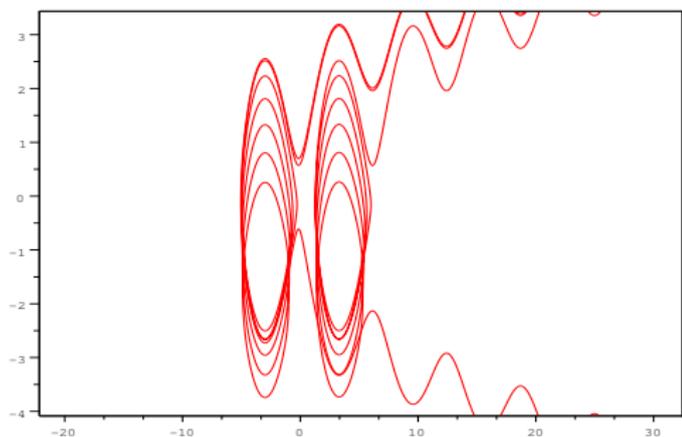
# Расщепление сепаратрис и захват в резонанс

- В окрестности седла происходит расщепление сепаратрис полной системы.
- Ширина зазора между сепаратрисами равна интегралу Мельникова по петле сепаратрисы.

# Расщепление сепаратрис и захват в резонанс

- В окрестности седла происходит расщепление сепаратрис полной системы.
- Ширина зазора между сепаратрисами равна интегралу Мельникова по петле сепаратрисы.
- Решения, захваченные в резонанс, находятся между расщепившимися сепаратрисами.

# Иллюстрация расщепления сепаратрис и захвата в резонанс



# Эволюция "закона сохранения"

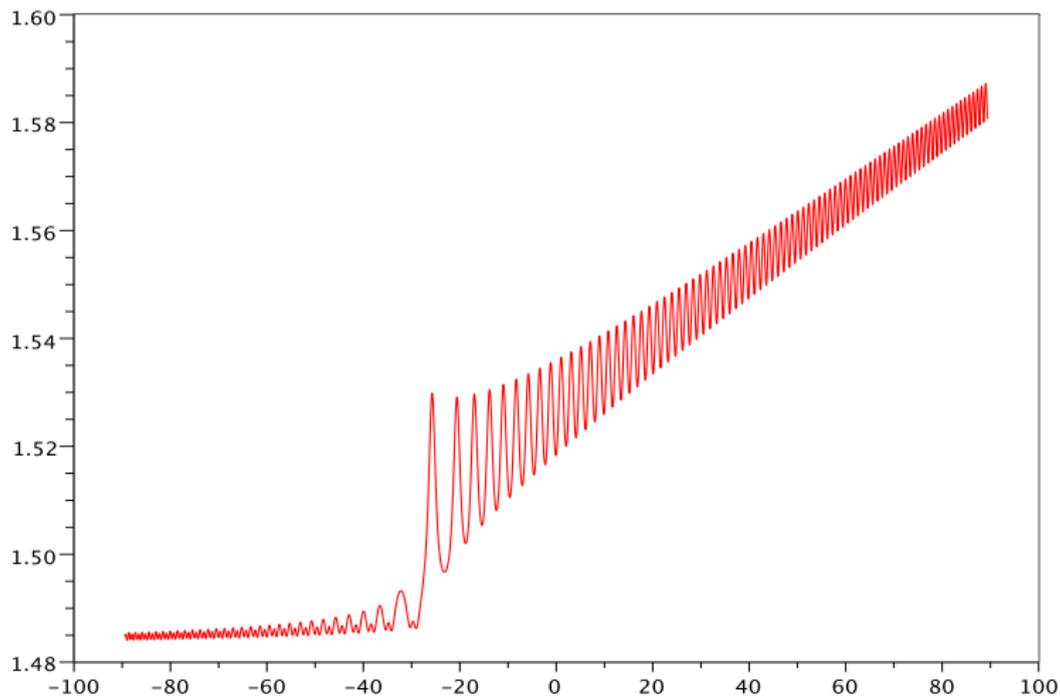
$E = (\alpha')^2 + f \cos(\alpha) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha$ . Производная в силу полной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\theta} = & \varepsilon^{3/2}(f^2 \cos(\alpha) + \rho^2) \sin(\alpha) + \\ & + \varepsilon^{5/2}(f \cos(\alpha) + \rho^2)/2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Параметр  $E$  неудобен для построения траектории вблизи сепаратрис. Основная причина:

- осцилляции в главном порядке.

# Е на численном решении



# Окрестность седла

Медленно меняющиеся седловые точки:

$$\alpha_s = 2\pi m - \frac{\varepsilon}{2f} + \frac{\varepsilon^{7/2}\theta}{48f^3} + \dots, \quad \rho_s = \frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon^{3/2} \left( \frac{f}{2} + \frac{(\varepsilon\theta)^2}{8} \right) + \dots$$

Система уравнений в окрестности седловой точки:

$$A = \alpha - \alpha_s, \quad R = \rho - \rho_s$$

$$A' = -2R - \varepsilon^{3/2}(r^2 + (\cos(A) - 1)f + R\varepsilon\theta) + \varepsilon^{5/2}\sin(A)/2 + \dots, \\ R' + \varepsilon/2 = -f \sin(A) + \varepsilon \cos(A)/2 + \varepsilon^2 \sin(A)/(8f) + \dots$$

# Асимптотика "первого интеграла" системы в окрестности седла

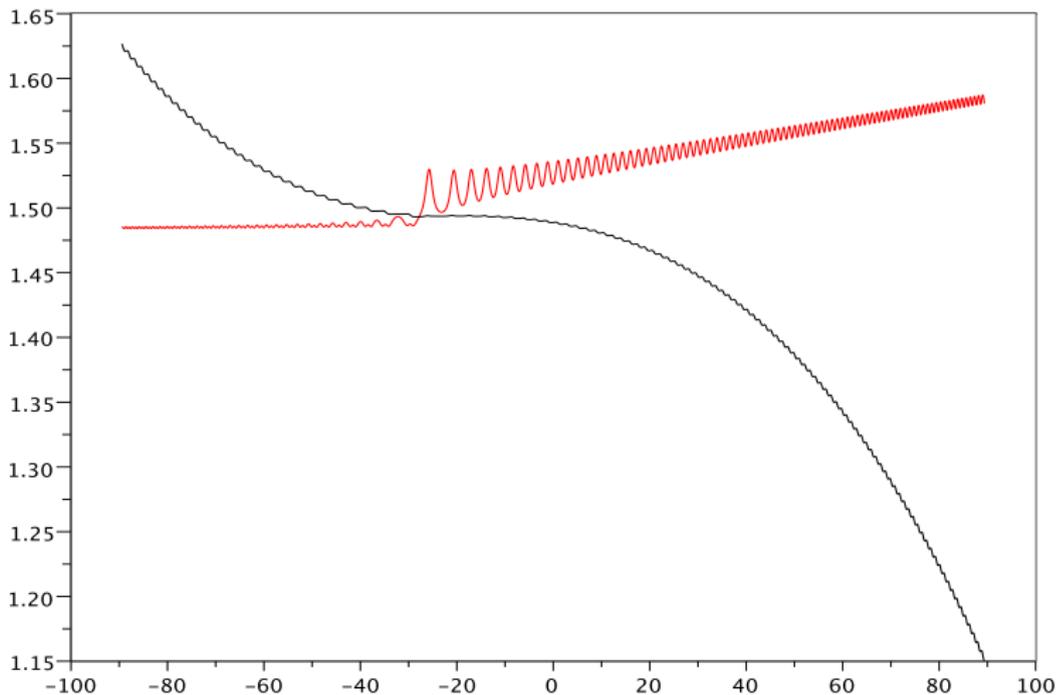
$$\begin{aligned} \tilde{E} = & R^2 + f \cos(A) + \frac{\varepsilon}{2}(\sin(A) - A) + \\ & + \frac{\varepsilon^{3/2}}{2}(2R^3 + 2fR \cos(A) - 2fR + \varepsilon\theta R^2) + \varepsilon^2 \frac{R^2}{8f^2}. \end{aligned}$$

Производная в силу системы:

$$\frac{d\tilde{E}}{d\theta} \sim \frac{\varepsilon^{5/2}}{2}(2R^2 \cos(A) - R^2 + f \sin^2(A)).$$

Интеграл Мельникова:  $\Delta\tilde{E} = -\varepsilon^{5/2} \int_{\mathcal{L}} R^2 = -\varepsilon^{5/2} 8\sqrt{2f}$ .

# $E$ и $\tilde{E}$ на численном решении



Для асимптотических решений уравнения главного резонанса с большой амплитудой:

- показано возникновение уравнения с внешним моментом из уравнения главного резонанса;

Для асимптотических решений уравнения главного резонанса с большой амплитудой:

- показано возникновение уравнения с внешним моментом из уравнения главного резонанса;
- вычислено изменение параметров асимптотического решения при проходе через резонанс без захвата;

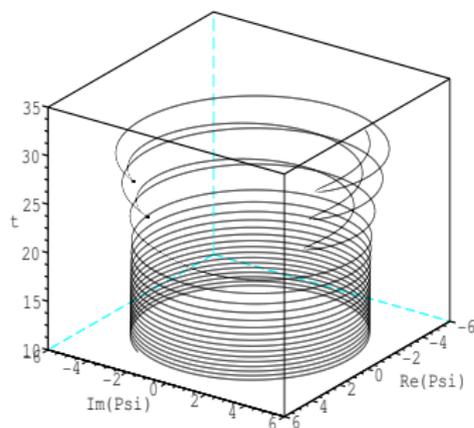
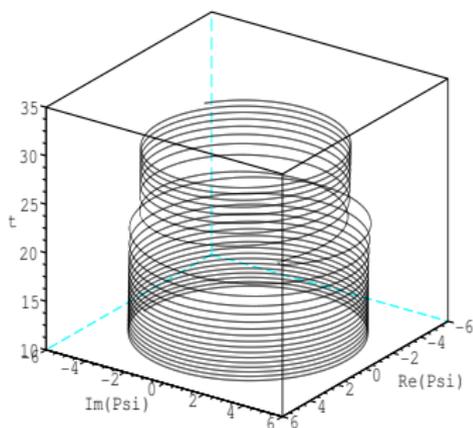
Для асимптотических решений уравнения главного резонанса с большой амплитудой:

- показано возникновение уравнения с внешним моментом из уравнения главного резонанса;
- вычислено изменение параметров асимптотического решения при проходе через резонанс без захвата;
- вычислена ширина слоя, захватываемого в резонанс  $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ ;

Для асимптотических решений уравнения главного резонанса с большой амплитудой:

- показано возникновение уравнения с внешним моментом из уравнения главного резонанса;
- вычислено изменение параметров асимптотического решения при проходе через резонанс без захвата;
- вычислена ширина слоя, захватываемого в резонанс  $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ ;
- получена оценка интервала значений параметров, в котором находятся захватываемые решения.

# Незахваченное и захваченное решения



<http://www.math.uni-potsdam.de/Jpreprint/2011.html>