Захват в резонанс в потенциальной яме с диссипацией

О.М.Киселев, Н.Тарханов

22 декабря 2013 г.

Постановка задачи

$$u'' + g(u) = \epsilon f(t) - \epsilon \Gamma u' \qquad (1)$$

$0 < \epsilon \ll 1$, $\Gamma > 0$, $f(t) = \sin(\omega t)$ или условно периодическая функция, $g(U)$ гладкая;

$$G(U) = \int_{U*}^{U} g(u)du, \quad \min_U g(U) = g(U_*).$$

Пусть $U(t - t_0, E)$ – периодическое решение при $\epsilon = 0$. $t_0 \in \mathbb{R}$ и

$$E = \frac{1}{2}(U')^2 + G(U)$$

Счет: $u'' + \sin(u) = \epsilon\cos(\omega t) - \epsilon\Gamma u'$

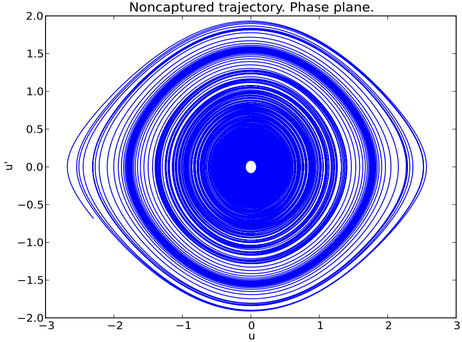

Рис.: Численное решение получено при $\epsilon = 0.01$, $\Gamma = 0.5$, $\omega = 0.8$ и начальных условиях $u|_{t=0} \sim -2.3031234$, $u'|_{t=0} \sim -0.68290$. Решение построено на интервале $t \in (0, 2000)$.

Захваченная траектория

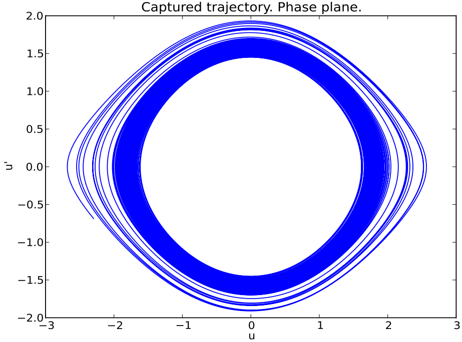

Рис.: Численное решение получено при $\epsilon = 0.01$, $\Gamma = 0.5$, $\omega = 0.8$ и начальных условиях $u|_{t=0} \sim -2.2977432$, $u'|_{t=0} \sim -0.6861611$. Решение построено на интервале $t \in (0, 2000)$. Начальные условия для этого решения мало отличаются от незахваченного решения.

История вопроса

- А. Пуанкаре. "Новые методы небесной механики"1899
- Н.М. Крылов Н.Н. Боголюбов "Введение в нелинейную механику"1934
- Г.Е. Кузьмак "Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений"1959
- Б.В. Чириков: "Резонансные явления в магнитных ловушках"1959
- В.К. Мельников: "Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях"1963
- В.И. Арнольд: "Ошибки метода усреднения при переходе через резонанс"1965
- А.Д. Морозов: "Полное качественное исследование уравнения Дуффинга"1973
- А.И. Нейштадт: "Переход через резонанс в двухчастичных задачах"1975

Захват определяется величиной фазовой переменной

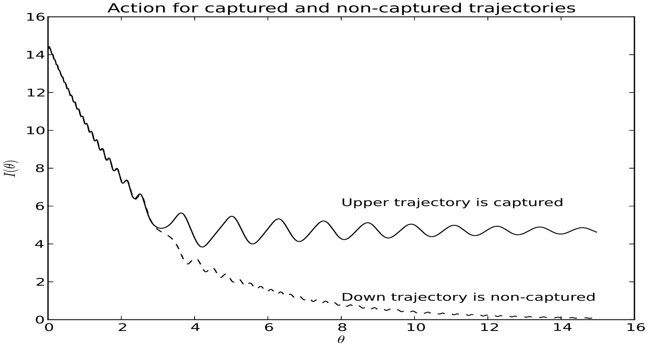

Рис.: Переменные типа действие для захватываемой и незахватываемой траектории совпадают вплоть до момента захвата

Ограничения

- Период монотонно зависит от энергии:
$T(E) := \int_L \frac{dU}{U'} < \infty, \quad \frac{dT}{dE} \neq 0$, L – траектория невозмущенной системы на фазовой плоскости.
- Возмущение – условно периодическое:
$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \, e^{\imath \omega_k t}$.
- Резонансные уровни энергии $m\,\Omega(E_{m,k}) = \omega_k$, лежат не слишком близко: $\min |E^0_{m_1,k_1} - E^0_{m_2,k_2}| \gg \sqrt{\epsilon}$,
$(m_1, k_1) \neq (m_2, k_2)$.

Формализм. Асимптотика до резонанса

Пусть $u_0(S,E)$ – периодическая функция – главный член асимптотики решения: $u \sim u_0$

- $(\sigma')^2\,\partial_S^2 u_0 + g(u_0) = 0$;
- $S = \sigma(\theta)/\epsilon + \alpha(\theta)$, где $\theta = \epsilon t$ – медленное время;
- $E = \frac{1}{2}(\sigma')^2\,\left(\partial_S u_0\right)^2 + G(u_0)$;
- $I_0(\theta)$ –действие. $I_0' + \Gamma I_0 = 0$;
- $\theta_{m,k} : E(\theta_{m,k}) = E_{m,k}$
- $\sigma(\theta)$ – решение задачи Коши:
  $\left(\int_L \frac{du_0}{\partial_S u_0}\right)\sigma' = 2\pi, \quad \sigma(\theta_{m,k}) = 0$;
- $\alpha' = \sigma', \quad \alpha(\theta_{m,k}) = \mathcal{A}$.

Формализм. Асимптотика в окрестности резонанса

- Главный член решения $u \sim u_0(t+\phi(\tau))$, $\quad \tau = \sqrt{\epsilon}t$,
- $\phi'' + q(\phi) + \Gamma + \sqrt{\epsilon}\phi' = 0$;
- Решение определяется параметром

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + Q(\phi) + \Omega\Gamma\phi = \mathcal{E}_{2j+1}, \tag{2}$$

где $Q'(\phi) = q(\phi)$;

$$q(\phi) \quad = \quad \frac{\Omega}{2\mathcal{I}} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t)\,\partial_S u_0\Big(t + \frac{\phi}{\Omega}\Big)dt,$$

$\Omega := \Omega(E^0_{m,k})$. Стационарные точки фазового сдвига $\{\phi_J\}$ – корни уравнения $q(\phi) + 2\Omega\Gamma = 0$, в неустойчивых (седловых) стационарных точках фазового сдвига $q'(\phi_{2j+1}) < 0$ в устойчивых $q'(\phi_{2j}) > 0$.

Условие захвата

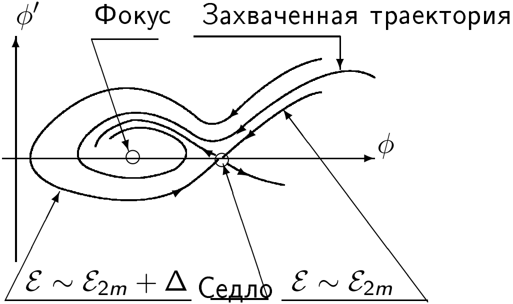

Рис.: Схема захвата

Асимптотическое решение захватывается в резонанс, если

$$\frac{\mathcal{E}^{-}_{2j+1}}{\Omega(E^0_{m,k})} + \frac{\theta_{m,k}}{\epsilon} < \mathcal{A} < \frac{\mathcal{E}^{+}_{2j+1}}{\Omega(E^0_{m,k})} + \frac{\theta_{m,k}}{\epsilon}.$$

Публикации

O.M. Kiselev, N. Tarkhanov. The capture of a particle into resonance at potential hole with dissipative perturbation. **Chaos, Solitons & Fractals**, v.58 (2014), 27-39.