Авторезонанс в диссипативной системе

С.Глебов, О.Киселев, Н.Тарханов

13 декабря 2009 г.

Авторезонанс

- нелинейные колебания
- зависимость периода колебаний от амплитуды
- внешняя осциллирующая сила с медленно меняющейся частотой

Приложения

- Ускорители релятивистских частиц
- Небесная механика
- Захват в резонанс заряженных частиц в магнитном поле

Ключевые работы

- В.И. Векслер Новый метод ускорения релятивистских частиц, 1945
- E.M. McMillan, The Synchrotron-A Proposed High Energy Particle Accelerator, 1945
- A.T. Sinclair, On the origin of the commensurabilities amongst the satellites of Saturn, 1972
- А.И. Нейштадт Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром 1975
- B Meerson and L. Friedland, Strong autoresonance excitation of Rydberg atoms: the Rydberg accelerator, 1990

Элементарная математическая модель

$$u'' + u + bu' - cu^3 = \varepsilon F\cos(\omega t). \qquad (1)$$

Здесь c и F постоянные, $0 < \varepsilon, b \ll 1$ – малые положительные параметры. Частота колебаний правой части уравнения линейно зависит от времени: $\omega = (1 - \alpha t)$.
Эволюцию решения можно разделить на быструю – время t и медленную – время $\tau = \varepsilon^{2/3} t$, используя асимптотическую подстановку:

$$u \sim \varepsilon^{1/3}\Psi(\tau)e^{i(t-\tau^2)} + \text{complex conjugate term}$$

Стандартная процедура усреднения по быстрому времени t в главном порядке по ε приводит к уравнению для функции Ψ

$$i\Psi' + (\tau - |\Psi|^2)\Psi + i\beta\Psi = f. \qquad (2)$$

$\beta = \varepsilon^{-2/3} b/4$, $f = F/(4\sqrt{2})$ и $c = -2\sqrt{2}$.

Мотивация

- Без диссипации – при $\beta \equiv 0$ – существует двухпараметрическое семейство неограничено растущих решений уравнения (2).
- При $\beta > 0$ двухпараметрического семейства растущих решений нет.

Уравнение главного резонанса часто записывается как система уравнений для амплитуды $R(\tau) = |\Psi|$ и фазы $\gamma(\tau) = \arg(\Psi)$:

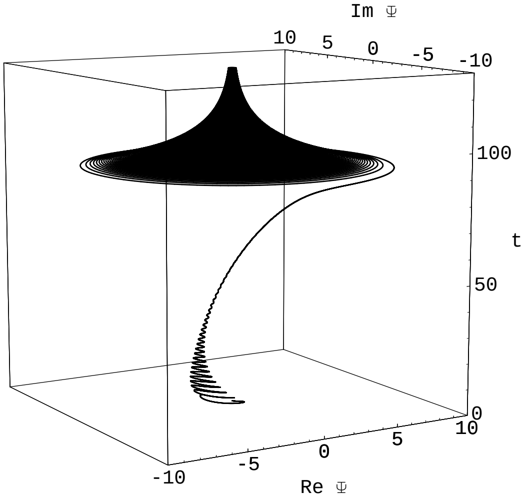
Причина обрыва

$$R' \;=\; -\beta R - f\sin(\gamma), \quad \gamma' = (\tau - R^2) - \frac{f}{R}\cos(\gamma). \qquad (3)$$

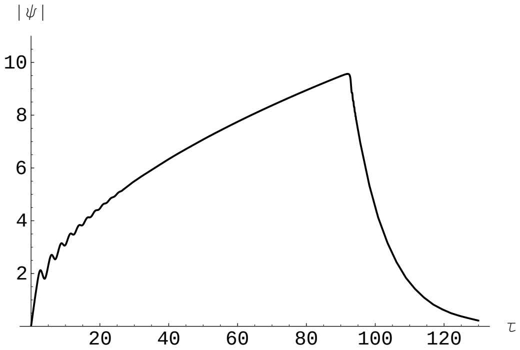
- Авторезонанс: $\gamma' = o(1)$ при $\tau \to \infty$, следовательно: $R = \sqrt{\tau} + o(1)$.
- Достаточное условие обрыва авторезонанса: $\tau_* = f^2/\beta^2$

Так из **условия автофазировки** и **анализа уравнений**, получается **достаточное условие** для оценки авторезонансного роста в диссипативной системе (Yaakobi, Friedland and Henis 2007, М.А. Шамсутдинов, Л.А. Калякин, А.А, Халфина, А.Л. Сухоносов, 2008) при малой диссипации: $\beta \ll 1$.

Решение (2) с параметрами $f = 1$, $\beta = 0.1$ и начальным условием $\Psi|_{\tau=0} = 0$.



Модуль решения (2) с параметрами $f = 1$, $\beta = 0.1$ и начальным условием $\Psi|_{\tau=0} = 0$.



Цели работы

- найти асимптотику для медленно меняющегося положения равновесия в уравнениии главного резонанса;
- показать, что медленно меняющееся положение равновесия – притягивающее множество;
- указать асимптотику для максимального значения амплитуды колебаний при авторезонансе с малым трением;
- вычислить продолжительность для авторезонансного режима в решении;

Результаты

Для формулировки результатов удобно сделать замены искомой функции и независимой переменной:

$$\theta = \tau\beta^2, \quad \beta\Psi(\tau) = \varphi(\theta, \beta). \tag{4}$$

Уравнение для φ имеет вид:

$$i\beta^4\varphi' + (\theta - |\varphi|^2)\varphi + i\beta^3\varphi = \beta^3 f. \tag{5}$$

Обозначим $|\varphi| = R$, $\gamma = \arg(\varphi)$, при $\theta > 0$, $0 < \beta \ll 1$

Результаты

Время существования авторезонансного режима в решении уравнения (2) оценивается величиной:

$$\theta_* = f^2 - \beta + \beta^2\left(\frac{f^2}{6}z_0 - \frac{1}{4f^2}\right) + (\sqrt{\beta^5}),$$

где z_0 – первый вещественный полюс трансцендента Пенлеве-1 с нулевыми данными монодромии: $y_1(\zeta, 0, 0)$.
Максимальная амплитуда решения оценивается величиной:

$$R_* \sim f - \frac{\beta}{2f} + O(\beta\sqrt{\beta}).$$

Росток авторезонанса

Ниже приведено подробное описание асимптотики авторезонансного решения, которое является притягивающим множеством для решений, захваченных в авторезонанс.
При $(f^2-\theta)\beta^{-1} \gg 1$ для R и γ справедливы представления:

$$
\begin{aligned}
R(\theta,\beta) &\sim \sqrt{\theta} + \beta^3 \frac{\sqrt{f^2-\theta}}{2\theta} - \beta^4 \frac{1}{2\theta\sqrt{f^2-\theta}} \\
&+ \beta^5 \frac{f^2-4\theta}{16\theta^2(f^2-\theta)^{3/2}} + \beta^6 \frac{(\theta-3f^2)(\theta-f^2)^3+\theta^{3/2}\sqrt{f^2-\theta}}{8\theta^{5/2}(f^2-\theta)^3} \\
\gamma(\theta,\beta) &\sim -\arctan\left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{f^2-\theta}}\right) + \beta \frac{1}{2\sqrt{\theta}\sqrt{f^2-\theta}} + \beta^2 \frac{1}{8\sqrt{\theta}(f^2-\theta)^{3/2}} \\
&+ \beta^3 \frac{(f^2+2\theta)\sqrt{f^2-\theta} - 24\sqrt{\theta}(\theta-f^2)^3}{48(\theta-f^2)^3\theta^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Результаты

Для представления асимптотики в окрестности $\theta = f^2$ удобно сделать замены:

$$\xi = (\theta - f^2)\beta^{-1}, \quad r(\xi,\beta) = (R - f)\beta^{-1}, \quad a(\xi,\beta) = (\gamma - \frac{3\pi}{2})\beta^{-1/2}.$$

Функции $r(\xi,\beta)$ и $a(\xi,\beta)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} r &\sim \frac{\xi}{2f} - \beta\frac{\xi^2}{8f^3} + \beta^2\frac{\xi^3}{16f^5} - \beta^{5/2}\frac{(2\xi+3)}{4f^2\sqrt{-\xi-1}}, \\ a &\sim \frac{\sqrt{-\xi-1}}{f} - \beta\frac{(2\xi^2+4\sigma-1)}{24f^3\sqrt{-\xi-1}}. \end{aligned}$$

Эти представления справедливы при $\beta(-1-\xi)^{-1} \ll 1$.

Результаты

Вблизи $\xi = -1$ асимптотику решения удобно представить в виде:

$$\tau = \frac{\xi + 1}{\beta}, \quad a = \beta^{1/2} u(\tau, \beta), \quad r = -\frac{1}{2f} + \beta \frac{4f^2\tau - 1}{8f^3} + \beta^2 v(\tau, \beta).$$

В этой области происходит потеря устойчивости аторезонансного режима решения. В главном порядке по β функция u может быть представлена в виде:

$$u(\tau) \sim 3^{3/5} y_1(z, 0, 0), \quad \tau = \left(\frac{f^2}{6} z - \frac{1}{4f^2}\right),$$

где $y_1(z, 0, 0)$ – трансцендент Пенлеве-1 [?] – специальное решение уравнения Пенлеве-1:

$$y_1'' = 6y_1^2 + z.$$

с асимптотикой:

Результаты

Трансцендент Пенлеве $y_1(z, 0, 0)$ имеет полюсы на вещественной оси. Приближение решения уравнения (2) с помощью трансцендента $y_1(z, 0, 0)$ пригодно вплоть до малой окрестности первого из вещественных полюсов этого трансцендента z_0 или, что то же самое до $\tau = T_0 = (f^2/6)z_0 - 1/(4f^2)$. Вблизи полюса область пригодности определяется неравенством:

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\tau - T_0} \ll 1.$$

Результаты

Асимптотика решения уравнения (2) в окрестности полюса представляет собой быстрые неавторезонансные колебания в новом масштабе независимой переменной $\theta = f^2 - \beta + \beta^2 T_0 + \sqrt{\beta^5}\zeta$. Искомые функции удобно предстваить в виде:

$$R \sim f - \frac{\beta}{2f} + \beta\sqrt{\beta}p(\zeta), \quad \gamma \sim \frac{3\pi}{2} + s(\zeta).$$

Функция $s(\zeta)$ является специальным решением уравнения:

$$s' = -\sqrt{E + f^2(s - \sin(s))},$$

таким, что $s \to -0$ при $\zeta \to -\infty$. Функция $p(\xi)$ определяется из уравнения:

$$p = -\frac{s'}{2f}.$$

Функция s зависит от параметра