Пороговые значения амплитуды для авторезонанса

О.М. Киселев

Институт математики с ВЦ, УНЦ РАН

4 июля, 2015

Захват фазы (авторезонанс)

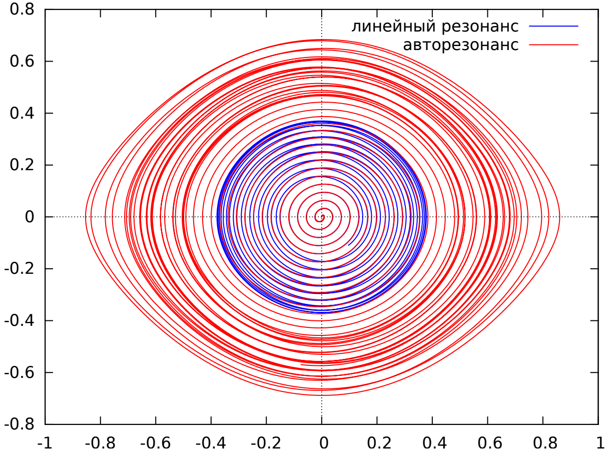
Возмущенный нелинейный осциллятор:

$$u'' + u - u^3 = 2\varepsilon f cos(\phi), 0 < \epsilon \ll 1.$$

- При $\phi \equiv t$ – решение $u \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/3})$.
- При $\phi = t - \epsilon^{4/3} t^2/2$ – решение $u \sim o(1)$.

Это явление – автофазировка или авторезонанс.
Независимо Векслер, Макмиллан в 1944.

Траектория на фазовой плоскости



Уравнение авторезонанса

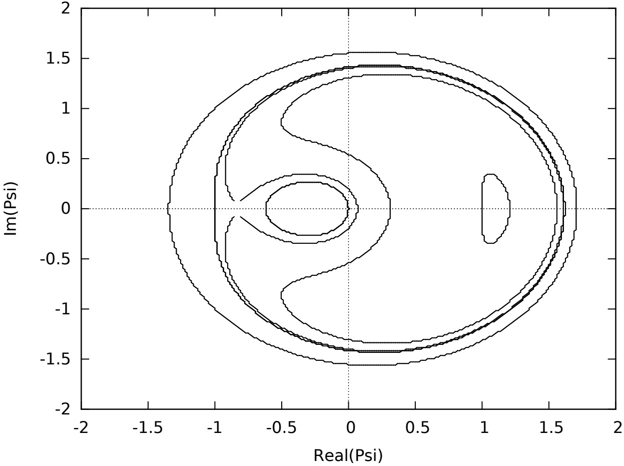
При малых u:

$$u \sim \varepsilon^{1/3}\Psi(\tau)\exp(-i(t-\tau^2/2)) + c.c., \quad \tau = \varepsilon^{2/3}t.$$

После усреднения по быстрому времени t получается уравнение главного резонанса:

$$i\Psi' + (|\Psi|^2 - \tau)\Psi = f.$$

Фазовый портрет уравнения с замороженными коэффициентами



Источник вдохновения

- Многие авторы изучали свойства решений этого или похожих уравнений (Б.В. Чириков, A.T. Sinclair, А.И. Нейштадт, L. Friedland, Л.А. Калякин и др.).
- Приложения к движению заряженных частиц, спутников. Исследования свойств решений по параметрам, асимптотик по времени и параметрам, об устойчивости специальных решений, бифуркациях, захвате в резонанс.
- Источник вдохновения этой работы – раздел в статье Л. Фридланда в Scholarpedia о пороговом значении амплитуды накачки. Указано пороговое значение, для которого в решении задачи Коши с нулевым начальным условием не возникает авторезонансного роста амплитуды колебаний.

Результат

В предлагаемом докладе задача в постановке из Scholarpedia не исследована.

Получены следующие результаты:

- Устойчивые авторезонансные решения для уравнения главного резонанса существуют для уравнений с убывающей амплитудой возмущающей силы;
- авторезонансное решение имеет порядок $\sqrt{\tau}$ и в главном не зависит от амплитуды возмущающей силы.

План рассказа

- Асимптотики решений уравнения главного резонанса.
- Устойчивость решений.
- Область захвата в авторезонанс.

Преобразованное уравнение

Уравнение главного резонанса удобно преобразовать к виду, в котором явно выделена растущая часть решения:

$$\Psi = \sqrt{\tau}\, e^{-i\tau^2/2}\, \psi.$$

В терминах $\theta = \tau^2/2$ уравнение главного резонанса примет вид:

$$i\psi' - |\psi|^2\psi = \frac{1}{(2\theta)^{3/4}}\, f\, e^{i\theta} - \frac{i}{4\theta}\psi.$$

Задача состоит в том, чтобы построить ограниченное решение этого уравнения при $\theta \to \infty$

Если пренебречь поправочными членами, то при $\tau \to \infty$ в главном получится уравнение:

$$i\psi_0' + |\psi_0|^2\psi_0 = 0. \tag{1}$$

Общее решение этого уравнения $\psi_0 = R\, e^{iR^2\tau + ia}$. Это решение содержит два вещественных параметра R, a.
В ситуации общего положения решения уравнения с главным членом ψ_0 убывают. Действительно, продифференцируем $R^2 = |\psi|^2$ в силу уравнения:

$$\frac{d(R^2)}{d\theta} = \frac{i}{(2\theta)^{3/4}} \left(\overline{f}\psi\, e^{-i\tau} - f\overline{\psi}\, e^{i\tau}\right) - \frac{R^2}{2\theta}. \tag{2}$$

Усреднение

Мы будем считать, что f – неосциллирующая функция θ. Для случая $\arg(\psi) - i\theta \gg 1$ получим усредненное уравнение:

$$|\tilde{\psi}|^2 \sim \frac{R_0^2}{\sqrt{\theta}}, \quad \theta \to \infty, \quad R_0 = \text{const}.$$

Усредненное уравнение непригодно при $\arg(\psi) \sim i\tau$. Следовательно, решения с неубывающей амплитудой по θ можно искать как возмущение решения уравнения (1) вблизи $R \sim 1$.

Уравнение для амплитуды и угла

Примем $f = \mathcal{F}\theta^{\lambda}$, где $\mathcal{F} \in \mathbf{R}$. Будем искать решение в виде:

$$\psi = (1+\rho)\, e^{i(\theta+\alpha)}.$$

Получим систему уравнений:

$$-\alpha'(1+\rho) - (1+\rho) + (1+\rho)^3 = \mathcal{F}\theta^{-A}\cos(\alpha),$$
$$\rho' = \mathcal{F}\theta^{-A}\sin(\alpha) - \frac{1+\rho}{4\theta}, \quad A = 3/4 - \lambda.$$

Асимптотики медленно меняющихся состояний равновесия

Theorem

Асимптотика при $\tau \to \infty$ *решения* (α_*, ρ_*) *имеет вид:*

$$\alpha_* \sim \alpha_0 + \frac{(-1)^n}{4\mathcal{F}}\theta^{-\lambda-1/4}, \quad \rho_* \sim \frac{(-1)^n \mathcal{F}}{2}\theta^{\lambda-3/4}, \quad \alpha_0 = \pi n,\ n = 0, 1$$

Следствие. Существуют авторезонансные решения для $f = f_1\tau^{2\lambda}$ при $-1/4 < \lambda < 3/4$, где $f_1 = \mathrm{const}$.

Theorem

Решение (α_*, ρ_*) *при* $n = 1$ *устойчиво по Ляпунову при достаточно больших* τ.

Захват в резонанс

Рассмотрим захват в резонанс решений уравнения главного резонанса при больших значениях $|\Psi|$.

$$\Psi = \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-2\lambda+3/2}\rho)e^{i\alpha}, \quad \varepsilon^2\tau = (1+\varepsilon^{2\lambda+5/2}s).$$

Удобно обозначить $\delta = \varepsilon^{3/2-2\lambda}$, тогда $\delta \ll 1$ при $-1/4 < \lambda < 3/4$.
В терминах новой переменной s:

$$\frac{d\rho}{ds} = (1+\delta\varepsilon^{1+4\lambda}s)^{2\lambda}\mathcal{F}\sin(\alpha),$$
$$\frac{d\alpha}{ds} = 2\rho + \varepsilon^{1+4\lambda}s + \delta\left(\rho^2 - (1+\delta\varepsilon^{1+4\lambda}s)^{2\lambda}\frac{\mathcal{F}\sin(\alpha)}{1+\delta\rho}\right). \tag{3}$$

Эта система определяет поведение решений в окрестности захвата в резонанс.

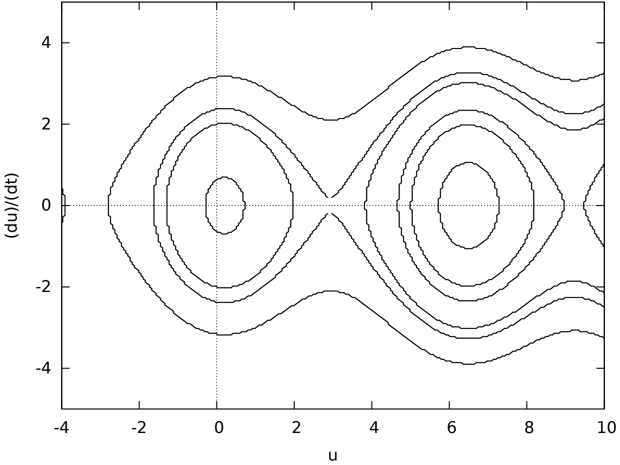
Ширина области захваченных решений

В главном по δ порядке эта система уравнений соответствует уравнению математического маятника с внешним моментом:

$$\alpha'' - \mathcal{F}\sin(\alpha) - \varepsilon^{1+4\lambda} \sim 0. \tag{4}$$

В терминах уравнения (4) захваченные решения соответствуют траекториям внутри петель сепаратрис на фазовом портрете. Такие траектории для уравнения (4) существуют в рассматриваемом интервале λ.

Маятник с внешним моментом



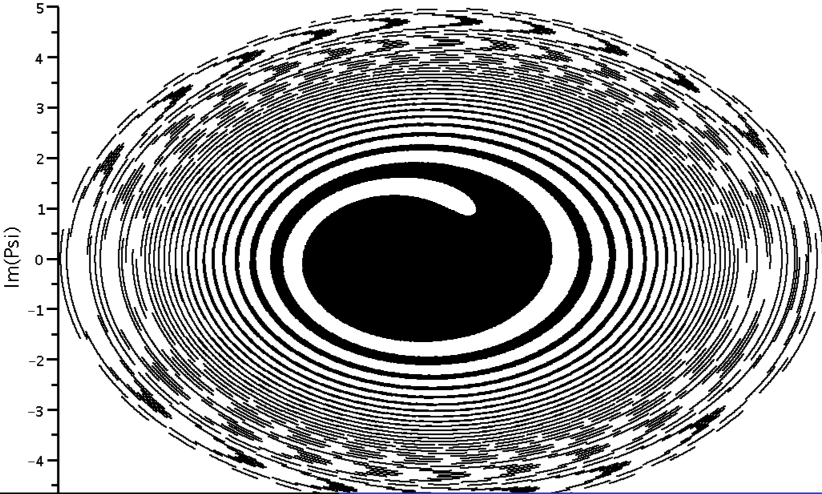
Расщепление сепаратрис

Для анализа захвата в резонанс следует рассмотреть полную систему. Результаты работы

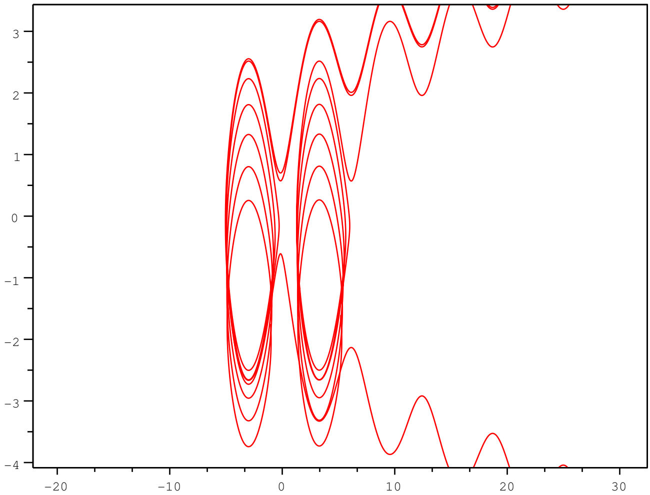
- O.Kiselev, N. Tarkhanov, Scattering of trajectories at a separatrix under autoresonance. J. Math. Phys. 55, n6, 063502 (2014)

дают значения параметров для захватываемых траекторий. Величина интеграла Мельникова $\mathcal{O}(\varepsilon^{5/2+2\lambda})$.

Начальные условия для захватываемых решений



Захваченные и незахваченные траектории



Заключение

- Существуют авторезонансные решения с убывающей амплитудой накачки;
- Величина авторезонансного роста не зависит от амплитуды накачки $f = f_1\tau^{2\lambda}$, $-1/4 < \lambda < 3/4$.

O.M. Kiselev Threshold values of autoresonant pumping http://arxiv.org/abs/1303.4691