Асимптотика скрытой бифуркационной границы в решении возмущенного уравнения Пенлеве-2

О. М. Киселев
Университет Иннополис, Иннополис,
Институт математики УФИЦ РАН, Уфа

2 Марта, 2021

Возмущенное уравнение Пенлеве-2

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon f(u, u', x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (1)$$

- Динамические бифуркации.
- Переходы через сепаратрисы.
- Захват в параметрический резонанс.

Список литературы

- R. Haberman. Nonlinear transition layers - second Painelevé transcendent. *Stud.Appl.Math.*, 57:247–270, 1977.
- G.J.M. Maree. Slow passage through a pitchfork bifurcation. *SIAM J. Math. Appl.*, 56:889–918, 1996.
- O.M. Kiselev. Hard loss of stability in Painleve-2 equation. *J.Nonl. Math.Phys.*, 8(1):65–95, 2001.
- O.M. Kiselev and S.G. Glebov. An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle-center bifurcation point. *Nonlinearity*, 16:327–362, 2003.
- R. Haberman. Slow passage through the nonhyperbolic homoclinic orbit associated with a subcritical pitchfork bifurcation for Hamiltonian systems the change the action.*SIAM J.of Appl. Math.*, 62(2):488–513, 2001.
- O.M. Kiselev and S.G. Glebov. The capture into parametric autoresonance. *Nonlin. Dyn.*, 48(1):217–230, 2007.
- Glebov S.G., Kiselev O.M., Tarkhanov N. *Nonlinear equations with small parameter*, v 23.de Gryuter, 2017.
- M. V. Karasev and A. V. Pereskokov. Turning points, phase shifts, and quantization rules in ordinary differential equations with a local rapidly decreasing nonlinearity.*Trans. Moscow Math. Soc.*, page 81–135, 1995.
- O.M.Kiselev and B.I.Suleimanov. The solution of the painleve equations as special functions of catastrophes, defined by a rejection in these equations of terms with derivative. *ArXiv:solv-int/9902004*, 1999.
- A.A. Kapaev. Scaling limits in the second painlevé transcendent. *J.Math.Sci.*, 83:38–61, 1997.
- A.R. Its and V.Yu. Novokshenov.*The isomonodromic deformation method in the theory of Painleve equations*, volume 1191 of *Lect. Notes in Math.*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- A.A. Kapaev V.Yu. Novokshenov A.S. Fokas, A.R. Its. *Painlevé Transcendents The Riemann-Hilbert Approach*, v.128 of *mathematical Surveys and Monographs*. Am.Math.Soc., 2006.
- A.R. Its, A.A. Kapaev. Metod izomonodromnykh deformacii i formuly svyazi dlya vtorogo transcendenta painleve. *Izv ANSSSR, ser. Matematicheskaya*, 51:878–892, 1987.
- A.N. Belogrudov. On asymptotics of degenerate solution of the second painleve equation.*Differential equations*, 33(5):587–594, 1997.

Мягкая потеря устойчивости

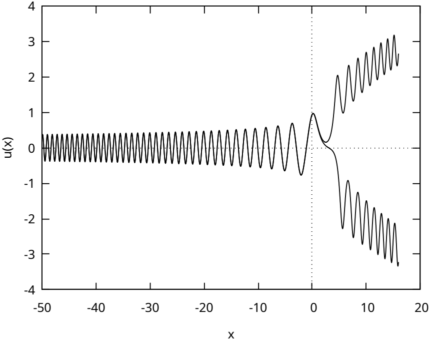


Рис.: Два численных решения невозмущенного уравнения Пенлеве-2 с близкими начальными условиями вдали от точки бифуркации. При $x < 0$ кривые почти совпадают, при $x > 0$, расходятся из-за мягкой потери устойчивости.

Асимптотические свойства решений

$$u \sim \frac{\alpha}{\sqrt[4]{-x}} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \log(-x) + \phi\right), \quad x \to -\infty. \tag{2}$$

Параметры решения – α и ϕ.

В правой части рисунка 1 решения осциллируют в окрестности $u = 0$, при $x \to \infty$ – осциллируют в окрестностях двух разных ветвей функции $\pm\sqrt{x/2}$.

Скрытая бифуркационная граница

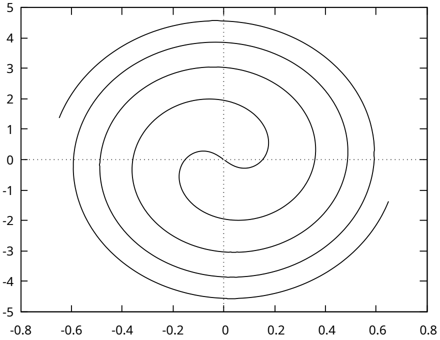
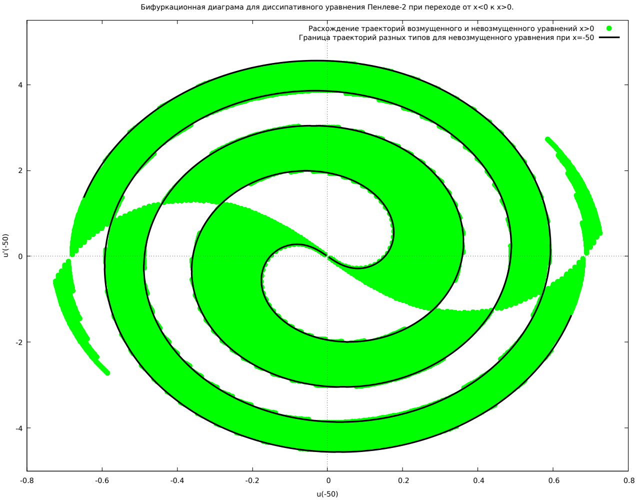


Рис.: Скрытая граница между решениями уравнения Пенлеве-2 при $x = -50$.

$$\frac{3}{2}\alpha^2 \log(2) - \frac{\pi}{4} - \arg\left(\Gamma\left(\frac{i\alpha^2}{2}\right)\right) = \phi. \qquad (3)$$

Мотивация



Бифуркационная диаграма для диссипативного уравнения Пенлеве-2 при переходе от x<0 к x>0.
Расхождение траекторий возмущенного и невозмущенного уравнений x>0
Граница траекторий разных типов для невозмущенного уравнения при x=-50
4
2
0
-2
-4
u'(-50)
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
u(-50)

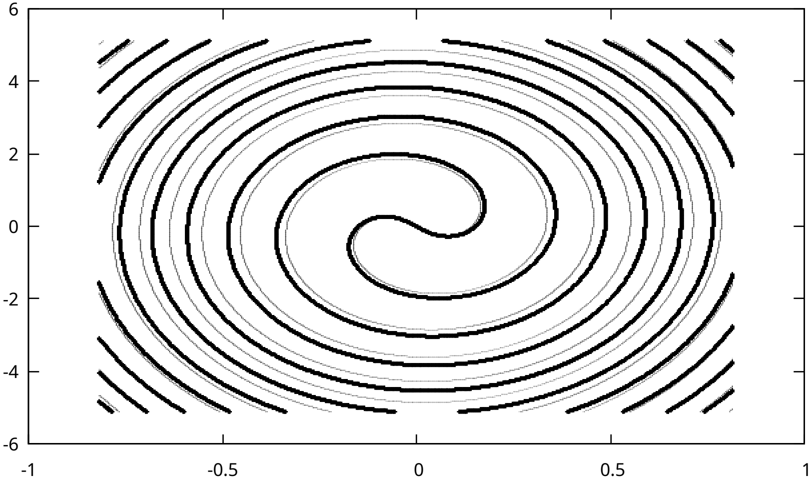


Рис.: Здесь приведены результаты вычислений для 2048x4096 траекторий методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Бифуркационная граница в сечении фазового пространства (u, u', x) плоскостью $x = -50$. Жирная кривая соответствует траекториям невозмущенного уравнения, тонкая кривая – возмущенному уравнению (1) с возмущением $f = u(u')^2$ для $\varepsilon = 0.1$.

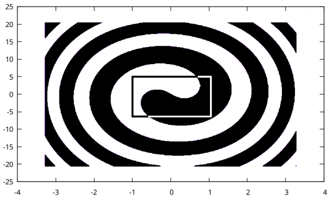


Рис.: Здесь приведены результаты вычисленй 2048x4096 траекторий. Сечение фазового пространства (u, u', x) при $x = -50$ для невозмущенного уравнения и для уравнения с малой диссипацией (1) $f = u'$ при $\varepsilon = 0.1$. Темная часть – множество начальных точек для траекторий, которые после пересечения $x = 0$ оказываются в окрестности $\sqrt{x/2}$. Бифуркационная граница для множества траекторий внутри выделенного прямоугольника на левой картинке показана на фоне бифуркацонной границы невозмущенного уравнения (1)

Асимптотическая подстановка

Асимптотика по параметру ε имеет вид:

$$u(x,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\xi/\varepsilon, \alpha, \phi),$$

$$\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_k(\xi), \quad \phi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(\xi). \tag{4}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u' \equiv \frac{du_k}{dx} = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\varepsilon\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \varepsilon\dot{u} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\varepsilon\dot{\alpha} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\varepsilon\dot{\phi}.$$

Условие для построения решения в форме (4) – равномерная ограниченность по ε при $\xi < 0$.

Главный член асимптотики возмущенного уравнения

$$u_0(\xi/\varepsilon,\alpha,\phi) \sim \frac{\alpha\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}}\sin(s) + \frac{\varepsilon^{7/4}}{(-\xi)^{7/4}}\left(-\frac{3}{8}\alpha^3\sin(s)+\right.$$

$$\left.\frac{102\alpha^5-20\alpha}{192}\cos(s) - \frac{1}{16}\alpha^3\sin(3s)\right) + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{-\xi}\right)^{13/4}\right),$$

где:

$$s = \frac{2}{3}(-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4}\int^{\xi/\varepsilon}\alpha^2(\zeta,\varepsilon)\frac{d\zeta}{\zeta} + \phi(\xi,\varepsilon).$$

Первая поправка

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_1 = -6u_0^2 u_1 + x u_1 - f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, \xi/\varepsilon) - 2\varepsilon \dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - \varepsilon \dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}_0.$$

Два решения линеаризованного уравнения Пенлеве-2:

$$u_\alpha \sim \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}} \sin\left(\frac{2}{3}(-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4}\int^{\xi/\varepsilon} \alpha^2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \phi\right), \quad \xi < 0, \quad \varepsilon$$

$$u_\phi \sim \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}} \cos\left(\frac{2}{3}(-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4}\int^{\xi/\varepsilon} \alpha^2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \phi\right), \quad \xi < 0, \quad \varepsilon$$

Решение уравнения для первой поправки может быть представлено в виде:

$$u_1 = u_\alpha \int_0^{\xi/\varepsilon} (f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) - 2\dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - 2\dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}) u_\phi(y) dy - \\ u_\phi \int_0^{\xi/\varepsilon} (f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) - 2\dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - 2\dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}) u_\alpha(y) dy. \quad (5)$$

Ограниченность первой поправки достигается благодаря выделению растущих решений методом усреднения:

$$\begin{aligned} \xi \dot{\alpha}_0 &= \varepsilon \int_0^{\xi/\varepsilon} f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) u_\phi(y) dy, \\ \xi \dot{\phi}_0 &= -\varepsilon \int_0^{\xi/\varepsilon} f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) u_\alpha(y) dy. \end{aligned}$$

Утверждение

Возмущение в виде:

$$f(u,u',x) = \sum_{4k_1+k_3\le k_2}^{N} a_{k_1k_2k_3} t^{k_1} u^{k_2} (u')^{k_3},$$

где $(k_1+1),(k_2+1),(k_3+1)\in\mathbb{N}$, $k_1+k_2+k_3\le N$, $N\in\mathbb{N}$, *позволяет построить поправки асимптотики (4) равномерно по* ε *при* $\xi<0$.

Если условия 1 выполнены, тогда подынтегральные выражения в (5) порядка $O(1)$, при $u_0\sim\sqrt[4]{\varepsilon}$, и $\varepsilon\dot{u}_0 = O(1/\sqrt[4]{\varepsilon}))$, и $\xi/\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$. В подынтегральном выражении порядок функций u_ϕ и u_α $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Тогда для ограниченности выражения $t^{k_1}u^{k_2}(u')^{k_3}$ получим $\varepsilon^{k_1+k_3/4-k_2/4-1/4}$. В результате для u_1:

$$4k_1+k_3 = k_2+1.$$

Такие же рассуждения применимы к поправкам произвольного порядка.

Пусть построен отрезок ряда теории возмущений:

$$U_N(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(\xi/\varepsilon, \xi).$$

Для остатка асимптотики $\varepsilon^N U = u(x, \varepsilon) - U_N(\xi, \varepsilon)$ получается уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = xU - 6u_0^2 U + \varepsilon F(U, U_N, U', U'_N, x).$$

Утверждение

Если возмущение f удовлетворяет условиям 1, тогда для $\forall N \in \mathbb{N}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 < 0$:

$$u(x, \varepsilon) = U_{N-1} + O(\varepsilon^N), \quad x \in (\xi_0/\varepsilon, 0), \quad \varepsilon \to 0.$$

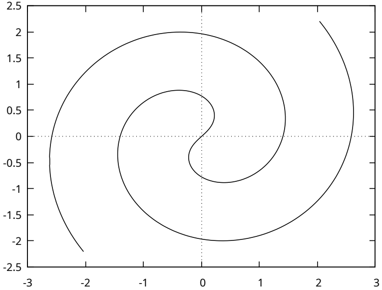


Рис.: Бифуркационная граница для параметров решений Пенлеве-2 в полярных координатах r, ϕ: $((3/2)r^2\log(2) - \pi/4 - \arg(\Gamma(ir^2/2)$.

Знак выражения

$$\kappa = \sin\left(((3/2)\alpha^2\log(2) - \pi/4 - \arg(\Gamma(i\alpha^2/2) - \phi)\right). \quad (6)$$

определяет границу (Итс, Капаев, 1987, Белогрудов, 1997) при $x \to \infty$:

Малая диссипация

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon u'. \tag{8}$$

Здесь:

$$\dot{\alpha}_0 \sim -\frac{1}{2}\alpha_0$$

и

$$\phi_0' \sim 0.$$

Асимптотическое поведение главного члена решения Painlevé-2 с малой диссипацией:

$$u_0 \sim a\frac{e^{-\varepsilon x/2}}{\sqrt[4]{-x}} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3a^2}{4}\int^x \frac{e^{-\varepsilon z}}{z}dz + p\right), \quad x \to -\infty.$$

Здесь a и p – параметры решения.

Сравнение асимптотики и численного решения

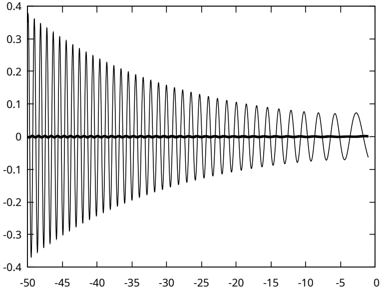


Рис.: Численное решение уравнения (8) на графике практически совпадает с асимптотическим. Жирная кривая вблизи оси x – разность между численным и асимптотическим решением.

Численная и асимптотическая границы

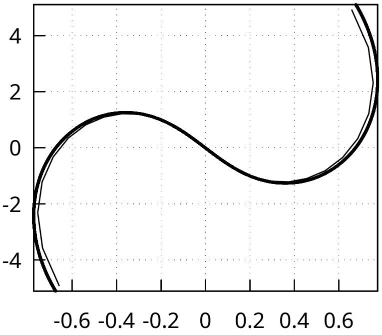


Рис.: Сечение u, u' при$x = -50$ для возмущенного уравнения с малой диссипацией (8) при $\varepsilon = 0.1$. Жирная линия – граница, построенная по вычислению 2048x4096 траекторий с начальной точкой $x = -50$. Тонкая линия – граница по теории возмущений.

Нелинейное возмущение

Ещё один пример возмущения:

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon(u')^2 u. \tag{9}$$

Для этого возмущения параметр α в главном – постоянная:

$$\dot{\alpha}_0 \sim 0$$

уравнение модуляции для ϕ:

$$\dot{\phi} \sim -\frac{1}{8}\alpha_0^3.$$

Тогда возмущение приводит к сдвигу:

$$u_0 \sim \frac{\alpha_0}{\sqrt[4]{-x}} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3\alpha_0^2}{4}\log(-x) - \frac{1}{8}\alpha^3\varepsilon x + p\right). \tag{10}$$

Здесь α и p – параметры решения.

Численное и асимптотическое решения

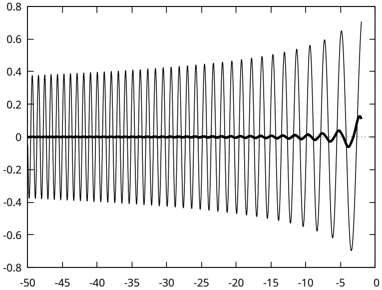


Рис.: Численное решение уравнения (9) на графике практически совпадает с асимптотическим. Разность численного и асимптотического решений – жирная линия вблизи оси x.

Границы

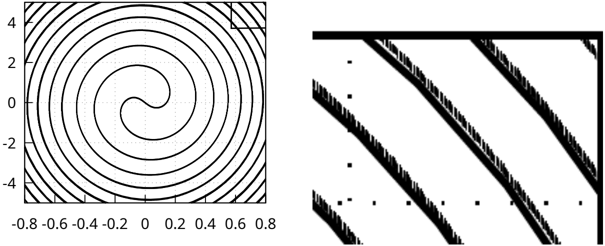


Рис.: Сечение u, u' бифуркационной границы $x = -50$ для нелинейного возмущения (9) при $\varepsilon = 0.1$. Граница, полученная численно из расчета 2048x4096 траекторий с началом при $x = -50$, и граница, полученная из теории возмущений, практически совпадают. Различие можно наблюдать вдали от центра.

Заключение

Выведенные в разделе 3 уравнения для параметров асимптотики трансцендента Пенлеве-2 при $x \to -\infty$ позволяют получить формулу для бифуркационной границы решений для возмущенного уравнения при мягкой потере устойчивости в окрестности $x = 0$. Это дает возможность разделить решения возмущенного уравнения на решения близкие к $\sqrt{x/2}$ и близкие к $-\sqrt{x/2}$ при $0 < x \ll \varepsilon^{-1}$. Результаты проиллюстрированы численно.

O.M. Kiselev An asymptotic structure of the bifurcation boundary of the perturbed Painleve-2 equation arXiv:2012.07895

Открытая задача