

Асимптотика скрытой бифуркационной границы и решение линеаризованного уравнения Пенлеве-2

О. М. Киселев

Университет Иннополис, Иннополис,
Институт математики УФИЦ РАН, Уфа

18 Марта, 2021

Возмущенное уравнение Пенлеве-2

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon f(u, u', x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

- ▶ Динамические бифуркации.
- ▶ Переходы через сепаратрисы.
- ▶ Захват в параметрический резонанс.

Список литературы

- ▶ R. Haberman. Nonlinear transition layers - second Painlevé transcendent. *Stud. Appl. Math.*, 57:247–270, 1977.
- ▶ G.J.M. Mearc. Slow passage through a pitchfork bifurcation. *SIAM J. Math. Appl.*, 56:889–918, 1996.
- ▶ O.M. Kiselev. Hard loss of stability in Painleve-2 equation. *J. Nonl. Math. Phys.*, 8(1):65–95, 2001.
- ▶ O.M. Kiselev and S.G. Glebov. An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle-center bifurcation point. *Nonlinearity*, 16:327–362, 2003.
- ▶ R. Haberman. Slow passage through the nonhyperbolic homoclinic orbit associated with a subcritical pitchfork bifurcation for Hamiltonian systems the change the action. *SIAM J. of Appl. Math.*, 62(2):488–513, 2001.
- ▶ O.M. Kiselev and S.G. Glebov. The capture into parametric autoresonance. *Nonlin. Dyn.*, 48(1):217–230, 2007.
- ▶ Glebov S.G., Kiselev O.M., Tarkhanov N. *Nonlinear equations with small parameter*, v 23. de Gruyter, 2017.
- ▶ M. V. Karasev and A. V. Pereskocov. Turning points, phase shifts, and quantization rules in ordinary differential equations with a local rapidly decreasing nonlinearity. *Trans. Moscow Math. Soc.*, page 81–135, 1995.
- ▶ O.M. Kiselev and B.I. Suleimanov. The solution of the painleve equations as special functions of catastrophes, defined by a rejection in these equations of terms with derivative. *ArXiv:solv-int/9902004*, 1999.
- ▶ A.A. Kapaev. Scaling limits in the second painlevé transcendent. *J. Math. Sci.*, 83:38–61, 1997.
- ▶ A.R. Its and V.Yu. Novokshenov. *The isomonodromic deformation method in the theory of Painleve equations*, volume 1191 of *Lect. Notes in Math.*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- ▶ A.A. Kapaev V.Yu. Novokshenov A.S. Fokas, A.R. Its. *Painlevé Transcendents The Riemann-Hilbert Approach*, v.128 of *mathematical Surveys and Monographs*. Am.Math.Soc., 2006.
- ▶ A.R. Its, A.A. Kapaev. Metod izomonodromnykh deformacii i formuly svyazi dlya vtorogo transcendentna painleve. *Izv ANSSSR, ser. Matematicheskaya*, 51:878–892, 1987.
- ▶ A.N. Belogradov. On asymptotics of degenerate solution of the second painleve equation. *Differential equations*, 33(5):587–594, 1997.

Мягкая потеря устойчивости

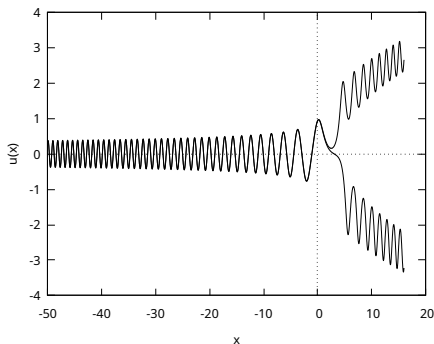


Рис.: Два численных решения невозмущенного уравнения Пенлеве-2 с близкими начальными условиями вдали от точки бифуркации. При $x < 0$ кривые почти совпадают, при $x > 0$, расходятся из-за мягкой потери устойчивости.

Асимптотические свойства решений

$$u \sim \frac{\alpha}{\sqrt[4]{-x}} \sin \left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \log(-x) + \phi \right), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2)$$

Параметры решения – α и ϕ .

В правой части рисунка 1 решения осциллируют в окрестности $u = 0$, при $x \rightarrow \infty$ – осциллируют в окрестностях двух разных ветвей функции $\pm\sqrt{x/2}$.

Скрытая бифуркационная граница

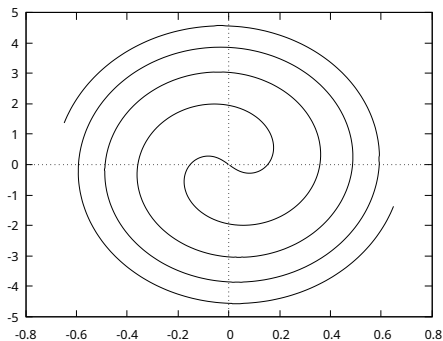
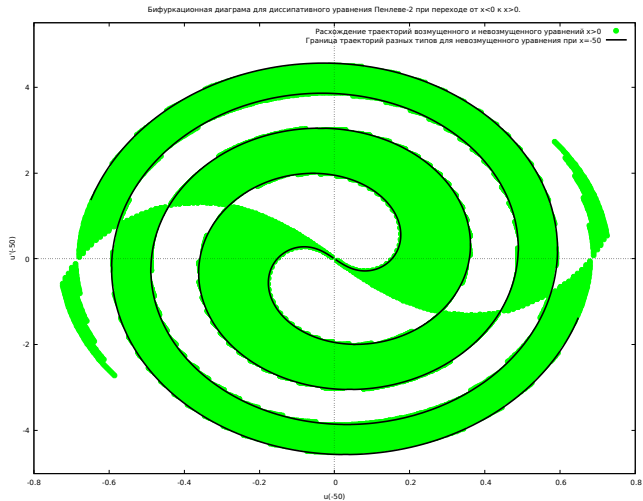


Рис.: Скрытая граница между решениями уравнения Пенлеве-2 при $x = -50$.

$$\frac{3}{2}\alpha^2 \log(2) - \frac{\pi}{4} - \arg\left(\Gamma\left(\frac{i\alpha^2}{2}\right)\right) = \phi. \quad (3)$$

Мотивация



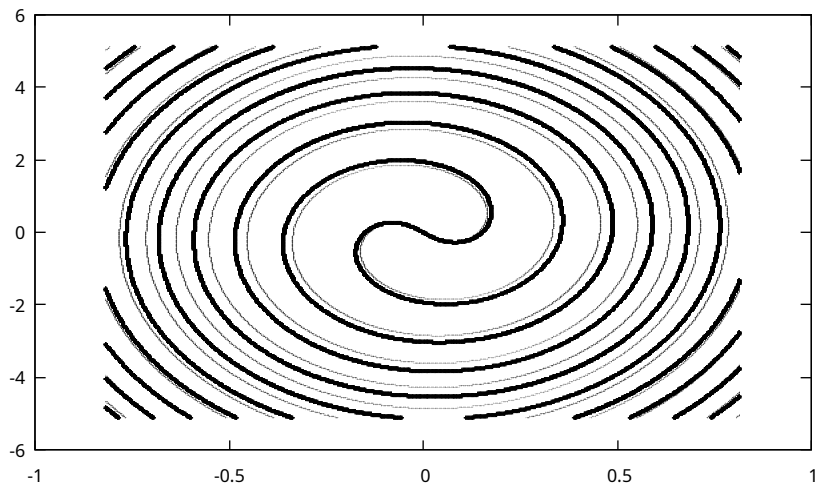


Рис.: Здесь приведены результаты вычислений для 2048×4096 траекторий методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Бифуркационная граница в сечении фазового пространства (u, u') плоскостью $x = -50$. Жирная кривая соответствует траекториям невозмущенного уравнения, тонкая кривая – возмущенному уравнению (1) с возмущением $f = u(u')^2$ для $\varepsilon = 0.1$.

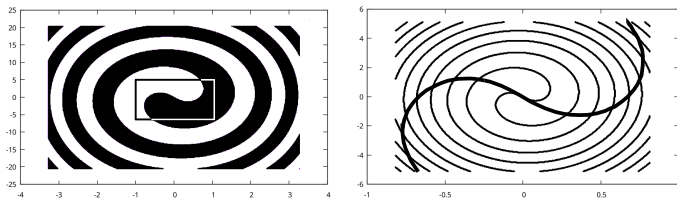


Рис.: Здесь приведены результаты вычислений 2048×4096 траекторий. Сечение фазового пространства (u, u', x) при $x = -50$ для невозмущенного уравнения и для уравнения с малой диссипацией (1) $f = u'$ при $\varepsilon = 0.1$. Темная часть – множество начальных точек для траекторий, которые после пересечения $x = 0$ оказываются в окрестности $\sqrt{x/2}$. Бифуркационная граница для множества траекторий внутри выделенного прямоугольника на левой картинке показана на фоне бифуркационной границы невозмущенного уравнения (1)

Асимптотическая подстановка

Асимптотика по параметру ε имеет вид:

$$u(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\xi/\varepsilon, \alpha, \phi),$$

$$\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_k(\xi), \quad \phi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(\xi). \quad (4)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u' \equiv \frac{du_k}{dx} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \varepsilon \dot{u} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \varepsilon \dot{\alpha} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \varepsilon \dot{\phi}.$$

Условие для построения решения в форме (4) – равномерная ограниченность по ε при $\xi < 0$.

Главный член асимптотики возмущенного уравнения

$$u_0(\xi/\varepsilon, \alpha, \phi) \sim \frac{\alpha\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}} \sin(s) + \frac{\varepsilon^{7/4}}{(-\xi)^{7/4}} \left(-\frac{3}{8}\alpha^3 \sin(s) + \frac{102\alpha^5 - 20\alpha}{192} \cos(s) - \frac{1}{16}\alpha^3 \sin(3s) \right) + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{-\xi}\right)^{13/4}\right),$$

где:

$$s = \frac{2}{3}(-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4} \int^{\xi/\varepsilon} \alpha^2(\zeta, \varepsilon) \frac{d\zeta}{\zeta} + \phi(\xi, \varepsilon).$$

Первая поправка

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_1 = -6u_0^2 u_1 + \chi u_1 - f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, \xi/\varepsilon) - 2\varepsilon \dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - \varepsilon \dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}_0.$$

Два решения линеаризованного уравнения Пенлеве-2:

$$u_\alpha \sim \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}} \sin \left(\frac{2}{3} (-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4} \int^{\xi/\varepsilon} \alpha^2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \phi \right), \quad \xi < 0,$$

$$u_\phi \sim \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{-\xi}} \cos \left(\frac{2}{3} (-\xi/\varepsilon)^{3/2} + \frac{3}{4} \int^{\xi/\varepsilon} \alpha^2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \phi \right), \quad \xi < 0.$$

Решение уравнения для первой поправки может быть представлено в виде:

$$u_1 = u_\alpha \int_0^{\xi/\varepsilon} (f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) - 2\dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - 2\dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}) u_\phi(y) dy - \\ u_\phi \int_0^{\xi/\varepsilon} (f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) - 2\dot{\alpha}_0 \partial_\alpha \dot{u}_0 - 2\dot{\phi}_0 \partial_\phi \dot{u}) u_\alpha(y) dy. \quad (5)$$

Ограниченность первой поправки достигается благодаря выделению растущих решений методом усреднения:

$$\xi \dot{\alpha}_0 = \varepsilon \int_0^{\xi/\varepsilon} f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) u_\phi(y) dy, \\ \xi \dot{\phi}_0 = -\varepsilon \int_0^{\xi/\varepsilon} f(u_0, \varepsilon \dot{u}_0, y) u_\alpha(y) dy.$$

Утверждение

Возмущение в виде:

$$f(u, u', x) = \sum_{4k_1+k_3 \leq k_2}^N a_{k_1 k_2 k_3} t^{k_1} u^{k_2} (u')^{k_3},$$

где $(k_1 + 1), (k_2 + 1), (k_3 + 1) \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + k_3 \leq N$, $N \in \mathbb{N}$,
 позволяет построить поправки асимптотики (4)
 равномерно по ε при $\xi < 0$.

Если условия 1 выполнены, тогда подынтегральные выражения в (5) порядка $O(1)$, при $u_0 \sim \sqrt[4]{\varepsilon}$,
 и $\varepsilon \dot{u}_0 = O(1/\sqrt[4]{\varepsilon})$, и $\xi/\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$. В подынтегральном выражении порядок функций u_ϕ и $u_\alpha \sim \sqrt[4]{\varepsilon}$.
 Тогда для ограниченности выражения $t^{k_1} u^{k_2} (u')^{k_3}$ получим $\varepsilon^{k_1+k_3/4-k_2/4-1/4}$. В результате для u_1 :

$$4k_1 + k_3 = k_2 + 1.$$

Такие же рассуждения применимы к поправкам произвольного порядка.

Интервал пригодности асимптотики

Пусть построен отрезок ряда теории возмущений:

$$U_N(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(\xi/\varepsilon, \xi).$$

Для остатка асимптотики $\varepsilon^N U = u(x, \varepsilon) - U_N(\xi, \varepsilon)$ получается уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = xU - 6u_0^2 U + \varepsilon F(U, U_N, U', U'_N, x).$$

Утверждение

Если возмущение f удовлетворяет условиям 1, тогда для $\forall N \in \mathbb{N}, \xi_0 \in \mathbb{R}, \xi_0 < 0$:

$$u(x, \varepsilon) = U_{N-1} + O(\varepsilon^N), \quad x \in (\xi_0/\varepsilon, 0), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Деформация бифуркационной границы

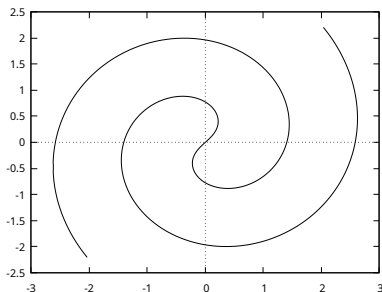


Рис.: Бифуркационная граница для параметров решений Пенлеве-2 в полярных координатах r, ϕ :

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)r^2 \log(2) - \pi/4 - \arg(\Gamma(ir^2/2))\right).$$

Знак выражения

$$\kappa = \sin \left(\left(\left(\frac{3}{2} \right) \alpha^2 \log(2) - \pi/4 - \arg(\Gamma(i\alpha^2/2) - \phi) \right) \right). \quad (6)$$

Малая диссипация

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon u'. \quad (8)$$

Здесь:

$$\dot{\alpha}_0 \sim -\frac{1}{2}\alpha_0$$

и

$$\phi'_0 \sim 0.$$

Асимптотическое поведение главного члена решения Painlevé-2 с малой диссипацией:

$$u_0 \sim a \frac{e^{-\varepsilon x/2}}{\sqrt[4]{-x}} \sin \left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3a^2}{4} \int^x \frac{e^{-\varepsilon z}}{z} dz + p \right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Здесь a и p – параметры решения.

Сравнение асимптотики и численного решения

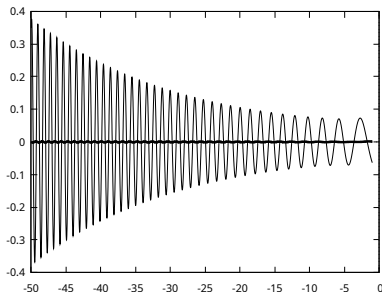


Рис.: Численное решение уравнения (8) на графике практически совпадает с асимптотическим. Жирная кривая вблизи оси x – разность между численным и асимптотическим решением.

Численная и асимптотическая границы

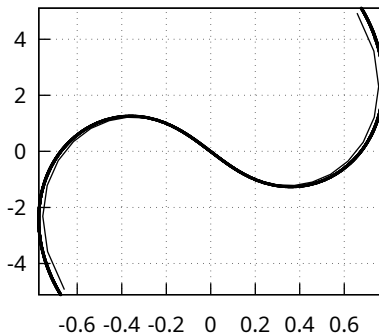


Рис.: Сечение u, u' при $x = -50$ для возмущенного уравнения с малой диссипацией (8) при $\varepsilon = 0.1$. Жирная линия – граница, построенная по вычислению 2048x4096 траекторий с начальной точкой $x = -50$. Тонкая линия – граница по теории возмущений.

Нелинейное возмущение

Ещё один пример возмущения:

$$u'' = -2u^3 + xu - \varepsilon(u')^2 u. \quad (9)$$

Для этого возмущения параметр α в главном – постоянная:

$$\dot{\alpha}_0 \sim 0$$

уравнение модуляции для ϕ :

$$\dot{\phi} \sim -\frac{1}{8}\alpha_0^3.$$

Тогда возмущение приводит к сдвигу:

$$u_0 \sim \frac{\alpha_0}{\sqrt[4]{-x}} \sin \left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3\alpha_0^2}{4} \log(-x) - \frac{1}{8}\alpha^3 \varepsilon x + p \right). \quad (10)$$

Здесь α и p – параметры решения.

Численное и асимптотическое решения

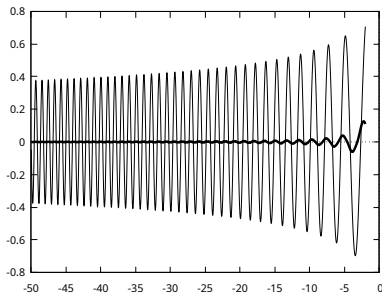


Рис.: Численное решение уравнения (9) на графике практически совпадает с асимптотическим. Разность численного и асимптотического решений – жирная линия вблизи оси x .

Границы

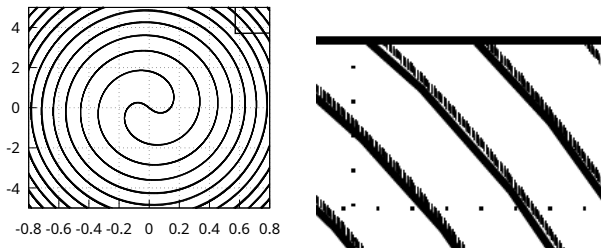


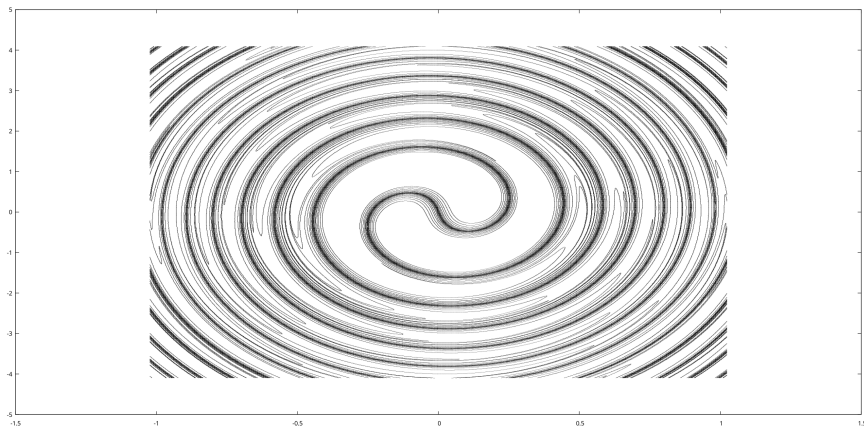
Рис.: Сечение u, u' бифуркационной границы $x = -50$ для нелинейного возмущения (9) при $\varepsilon = 0.1$. Граница, полученная численно из расчета 2048x4096 траекторий с началом при $x = -50$, и граница, полученная из теории возмущений, практически совпадают. Различие можно наблюдать вдали от центра.

Заключение

Выведенные в разделе 3 уравнения для параметров асимптотики трансцендента Пенлеве-2 при $x \rightarrow -\infty$ позволяют получить формулу для бифуркационной границы решений для возмущенного уравнения при мягкой потере устойчивости в окрестности $x = 0$. Это дает возможность разделить решения возмущенного уравнения на решения близкие к $\sqrt{x/2}$ и близкие к $-\sqrt{x/2}$ при $0 < x \ll \varepsilon^{-1}$. Результаты проиллюстрированы численно.

O.M. Kiselev An asymptotic structure of the bifurcation boundary of the perturbed Painleve-2 equation
arXiv:2012.07895

Открытая задача



L-A-пара для уравнения Пенлеве-2

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A\Psi, \quad A = -i(4\lambda^2 + x + 2u^2)\sigma_3 + 4u\lambda\sigma_1 - 2u'\sigma_2. \quad (11)$$

Здесь приняты обозначения для матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = U\Psi, \quad U = -i\lambda\sigma_3 + u\sigma_1. \quad (13)$$

Асимптотика при $\lambda \rightarrow \infty$

Решение системы уравнений (11) имеет единственную существенно особую точку $\lambda = \infty$. Асимптотика решения этой системы при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\psi^\infty \sim \left(I + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} i(u^2x - (u')^2 + u^4) & u \\ u & -i(u^2 - (u')^2 + u^4) \end{pmatrix} \right) \times \exp(-i\Omega(\lambda)\sigma_3), \quad (14)$$

где $\Omega(\lambda) = (4\lambda^3/3 + \lambda x)$.

Главный член этой асимптотики осциллирует на линиях $\Im(4\lambda^3/3 + \lambda x) = 0$. В окрестности бесконечно удаленной точки такие линии имеют асимптоты – прямые $\arg(\lambda) = \pi(k - 1)/3$, $k = 1, \dots, 6$. Для каждой из этих шести линий в окрестности бесконечно удаленной точки можно определить функцию Ψ_k по заданной асимптотике в направлении $\arg(\lambda) = \pi(k - 1)/3$:

$$\Psi_k \sim \Psi^\infty, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Так как каждая из матриц Ψ_k является фундаментальной системой решений для (11), поэтому их можно выразить друг через друга:

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k S_k. \quad (15)$$

Здесь S_k – матрица, состоящая из параметров, зависящих от решения уравнения Пенлеве-2, но независящих от параметра λ .

Пути интегрирования

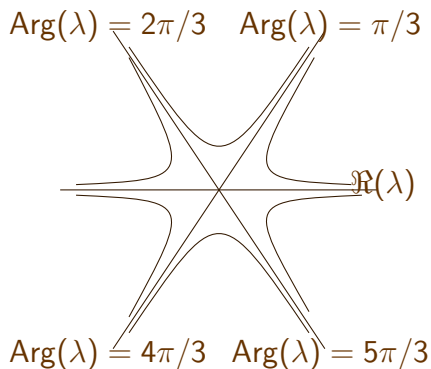


Рис.: Лучи Стокса, уходящие к бесконечно удаленной точке в направлениях $\pi(k-1)/6$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и кривые интегрирования стремящиеся к ∞ в направлениях ∞_k, ∞_{k+1} .

Вывод формул

Для вывода интегральных формул для матрицы Стокса удобно воспользоваться заменой:

$$\Psi_k = \exp(-i\Omega(\lambda)\sigma_3) \Phi_k.$$

С помощью системы уравнений (11) можно вывести похожую систему уравнений для матрицы Φ_k :

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi_k = (\exp(i\Omega\sigma_3) A \exp(-i\Omega\sigma_3) + i\Omega'\sigma_3) \Phi_k. \quad (16)$$

Для матрицы Φ_k справедливо условие:

$$\Phi_k \rightarrow I, \quad \lambda = Re^{i(k-1)\pi/6}, \quad R \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что решение задачи рассеяния (16), (17) удовлетворяет системе интегральных уравнений:

Интегральные формулы

В соответствии с формулой связи фундаментальных решений (15):

$$I + \int_{\infty_{k+1}}^{\infty_k} (\exp(i\Omega\sigma_3) A \exp(-i\Omega\sigma_3) + i\Omega'\sigma_3) \Phi_{k+1} d\mu = S_k.$$

Теперь S_k можно выразить, используя Ψ_k :

$$S_k = I + \int_{\infty_{k+1}}^{\infty_k} \exp(i\Omega\sigma_3) (A + i\Omega'\sigma_3) \Psi_{k+1} d\mu. \quad (19)$$

Интегральную формулу для матрицы S_k удобно рассмотреть по компонентам. При этом важно учитывать асимптотические свойства матрицы Ψ из формулы (17).

Компоненты матрицы Стокса

$$(S_k)_{11} = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R \exp(i\pi(k+1)/3)}^{R \exp(i\pi k/3)} -\frac{i u^2 x - i w^2 + i u^4}{2 \mu^2} + \mathcal{O}(R^{-3}) d\mu = 1.$$

$$(S_k)_{22} = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R \exp(i\pi(k+1)/3)}^{R \exp(i\pi k/3)} \frac{u^2 x - i w^2 + i u^4}{2 \mu^2} + \mathcal{O}(R^{-3}) d\mu = 1.$$

$$(S_k)_{12} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R \exp(i\pi(k+1)/3)}^{R \exp(i\pi k/3)} (4i u \mu + (2u^3 x - 2u w^2 - 2w + 2u^5) + \mathcal{O}(1/R)) \exp(2i(4\mu^3/3 + x\mu)) d\mu$$

$$(S_k)_{21} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R \exp(i\pi(k+1)/3)}^{R \exp(i\pi k/3)} (-4i u \mu + (2u^3 x - 2u w^2 - 2w + 2u^5) + \mathcal{O}(1/R)) \exp(-2i(4\mu^3/3 + x\mu)) d\mu$$

Матрицы перехода

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 3, 5;$$

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & s_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 2, 4, 6.$$

В терминах статьи Флашки и Ньюэлла (1980)

$$s_1 = a, \quad s_2 = b, \quad s_3 = c, \quad s_4 = d, \quad s_5 = e, \quad s_6 = f,$$

$$s_1 = s_4, \quad s_2 = s_5, \quad s_3 = s_6.$$

Интегральные формулы

Основной результат раздела 5 – явные формулы для данных монодромии.

При $k = 1, 3, 5$:

$$s_k = 2 \int_{\infty_{k+1}}^{\infty_k} ((2u\mu - iu')(\Psi_k)_{11} + iu^2(\Psi_k)_{21}) e^{-i(4\mu^3/3+x\mu)} d\mu;$$

при $k = 2, 4, 6$:

$$s_k = 2 \int_{\infty_{k+1}}^{\infty_k} ((2u\mu + iu')(\Psi_k)_{22} - iu^2(\Psi_k)_{12}) e^{i(4\mu^3/3+x\mu)} d\mu.$$

Пути интегрирования для представления

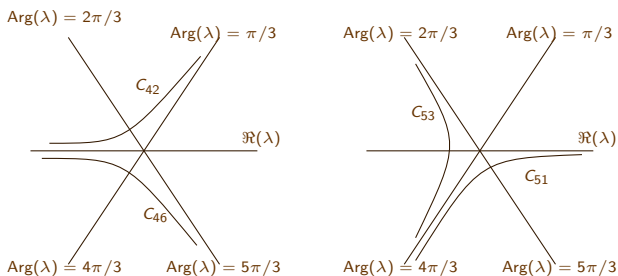


Рис.: Пути интегрирования в задаче Римана для матричной функции Ψ и для вычисления трансцендента Пенлеве по интегральным формулам.

Интегральное представление решения

$$\begin{aligned}
 u(x) = & -\frac{s_1}{2\pi} \int_0^{\infty_4} (\Psi_4)_{21} e^{i\Omega} d\mu - \frac{s_1}{2\pi} \int_{\infty_2}^0 (\Psi_2)_{21} e^{i\Omega} d\mu - \\
 & \frac{s_2}{2\pi} \int_0^{\infty_4} (\Psi_4)_{21} e^{i\Omega} d\mu - \frac{s_2}{2\pi} \int_{\infty_6}^0 (\Psi_6)_{21} e^{i\Omega} d\mu - \\
 & \frac{s_2 s_3}{2\pi} \int_0^{\infty_4} (\Psi_4)_{21} e^{i\Omega} d\mu - \frac{s_2 s_3}{2\pi} \int_{\infty_6}^0 (\Psi_6)_{21} e^{i\Omega} d\mu. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Асимптотика вблизи лучей Стокса

В окрестности луча $\alpha = \arg(\lambda) = \pi/3 + \beta$:

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{ie^{-i\beta}}{(1+i\sqrt{3})r} \\ \frac{ie^{-i\beta}}{(1+i\sqrt{3})r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(\Omega) & 0 \\ 0 & \exp(-\Omega) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{4}{3}r^3(\sin(3\beta) + i\cos(3\beta)) + \\ & \frac{rx}{2}((\sin(\beta) + \sqrt{3}\cos(\beta)) - i(\cos(\beta) - \sqrt{3}\sin(\beta))) + \\ & O\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Возмущение линейной системы

Пусть $u = u + \delta u$, система уравнений для вариации $\delta\Psi$:

$$\frac{d\delta\Psi}{d\lambda} = A\delta\Psi + \delta A\Psi, \quad \delta A = -i(4\lambda^2 + x + 4u\delta u)\sigma_3 + 4\delta u\lambda\sigma_1 - 2\delta u'\sigma_2. \quad (21)$$

Общее решение:

$$\delta\Psi = \Psi C + \Psi \int \Psi^{-1} \delta A \Psi d\mu, \quad (22)$$

где C – матрица, составленная из произвольных постоянных – параметров решения системы (21).

Квадратичные выражения

$$\begin{aligned}
 (\Psi^{-1}\delta A\Psi)_{11} &= (\Psi_{2,1}\Psi_{2,2} - \Psi_{1,1}\Psi_{1,2})4\lambda\delta u \\
 &+ (\Psi_{2,1}\Psi_{2,2} + \Psi_{1,1}\Psi_{1,2})2i\frac{d}{dx}\delta u \\
 &- (\Psi_{1,1}\Psi_{2,2} + \Psi_{1,2}\Psi_{2,1})4iu\delta u,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Psi^{-1}\delta A\Psi)_{21} &= (\Psi_{1,1}^2 - \Psi_{2,1}^2)4\lambda\delta u - (\Psi_{2,1}^2 + \Psi_{1,1}^2)2i\left(\frac{d}{dx}\delta u\right) \\
 &+ 8i\Psi_{1,1}\Psi_{2,1}u\delta u,
 \end{aligned}$$

Удобно обозначить:

$$\psi_1^+ = \Psi_{11}^2 + \Psi_{21}^2, \quad \psi_1^- = \Psi_{11}^2 - \Psi_{21}^2, \quad \psi_1 = \Psi_{11}\Psi_{21};$$

$$\delta s_1 = \int_{\infty_6}^{\infty_1} 4\mu\delta u\psi_1^- - 2i\left(\frac{d}{dx}\delta u\right)\psi_1^+ + 8iu\delta u\psi_1 d\mu.$$

Уравнения для квадратов

$$\frac{d\psi_1^+}{d\lambda} = -2i(4\lambda^2 + x + 2u^2)\psi_1^- + 16\lambda u\psi_1.$$

$$\frac{d\psi_1^-}{d\lambda} = -2i(4\lambda^2 + x + 2u^2)\psi_1^+ + 8iu'\psi_1.$$

$$\frac{d\psi_1}{d\lambda} = 4\lambda u\psi_1^+ - 2iu'\psi_1^-.$$

$$\frac{d\psi_1^+}{dx} = -2i\lambda\psi_1^- + 4u\psi_1,$$

$$\frac{d\psi_1^-}{dx} = -2i\lambda\psi_1^+,$$

$$\frac{d\psi_1}{dx} = u\psi_1^+.$$

Линеаризованное уравнение Пенлеве-2

Будем считать, что вариация δu – решение линеаризованного уравнения:

$$\delta u'' = (6u^2 + x)\delta u + f, \quad (23)$$

Дифференцирование (23) по x в силу уравнений для ψ_1^+ , ψ_1^- , ψ_1 и линеаризованного уравнения (23) дает (здесь и ниже для определенности рассматривается s_1):

$$\begin{aligned} \frac{d\delta s_1}{dx} &= \int_{\infty_6}^{\infty_1} ((-2i(4\mu^2 + x + 2u^2)\psi_1^+ + 8iu'\psi_1)\delta u - 2if\psi_1^+) d\mu \\ &= \int_{\infty_6}^{\infty_1} \frac{d\psi_1^-}{d\mu} d\mu - 2if \int_{\infty_6}^{\infty_1} \psi_1^+ d\mu. \end{aligned}$$

АСИМПТОТИКИ

$$\Psi_{11}^2 \sim \exp\left(-2i\left(\frac{4}{3}r^3 e^{3i\alpha} + xre^{i\alpha}\right)\right),$$

$$\Psi_{21}^2 \sim \frac{e^{-2i\alpha}}{r^2} \exp\left(-2i\left(\frac{4}{3}r^3 e^{3i\alpha} + xre^{i\alpha}\right)\right), \quad \lambda \rightarrow \infty_6,$$

При $\lambda \rightarrow \infty_1$, используя $r = |\lambda|$, $\beta = \text{Arg}(\lambda) - \pi/3$, получим:

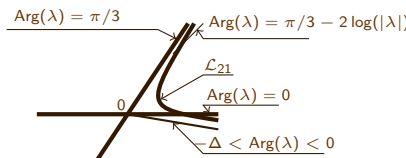
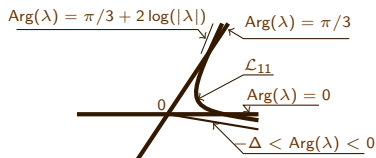
$$\Psi_{11}^2 \sim \exp\left(2i\left(\frac{4}{3}r^3 e^{3i\beta} - xre^{i\pi/3} e^{i\beta}\right)\right) (1 + O(r^{-1})) + O(1/r)$$

$$+ s_1^2 \exp\left(-2i\left(\frac{4}{3}r^3 e^{3i\beta} - xre^{i\pi/3} e^{i\beta}\right)\right) \left(\frac{e^{-2i\pi/3 - 2i\beta}}{r^2} + O(r^{-3})\right),$$

$$\Psi_{21}^2 \sim s_1^2 \exp\left(-2i\left(\frac{4}{3}r^3 e^{3i\beta} - xre^{i\pi/3} e^{i\beta}\right)\right) (1 + O(r^{-1})) + O(1/r)$$

Интегрирование

$$\int_{\infty_6}^{\infty_1} \frac{d\psi_1^-}{d\mu} d\mu = \int_{\mathcal{L}_{11}} \frac{d\psi_{11}^2}{d\mu} d\mu + \int_{\mathcal{L}_{21}} \frac{d\psi_{21}^2}{d\mu} d\mu.$$



Вариация коэффициента Стокса и решение линеаризованного Пенлеве-2

Тогда справедлива формула:

$$\frac{d\delta s_1}{dx} = 2if \int_{\infty_6}^{\infty_1} \psi_1^+ d\mu. \quad (24)$$

Уравнение для ψ_1^+ :

$$\frac{d^2\psi_1^+}{dx^2} = (x + 6u^2)\psi_1^+ - i\frac{1}{2} \frac{d\psi_1^-}{d\lambda}.$$

$$v(x) = \int_{\infty_1}^{\infty_6} \psi_1^+(\lambda, x) d\lambda.$$

$$v'' = (6u^2 + x)v$$