Российская академия наук

Уфимский научный центр
Институт математики с вычислительным центром

на правах рукописи

Киселев Олег Михайлович

Многомерные нелинейные интегрируемые уравнения: асимптотики решений и возмущения

01.01.02 -дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Уфа 2001

Оглавление

Глава 0

Введение

Изучение асимптотических свойств решений лежит в основании современных исследований в области нелинейных уравнений математической физики. Достаточно вспомнить, что Дж. Рассел в 1834 заинтересовался уединенной волной из-за неизменности ее специфической формы, сохраняющейся на большом промежутке времени. Да и знаменитое уравнение Кортевега и де Фриза получено как асимптотический предел уравнения для поверхностых волн. Возрождение интереса к уравнению КдФ в шестидесятых годах 20-го века началось с изучения поведения на больших временах цепочки Ферми-Паста-Улама – нелинейно взаимодействующих осцилляторов. Последующие работы М.Крускала и Н.Забусски [142] и Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [112] привели к открытию солитона, а затем и метода обратной задачи рассеяния. История этого вопроса всесторонне и в подробностях изложена в книгах М. Абловица и Х. Сегура [1], А. Ньюэлла [66], а также в замечательной книжке А.Т. Филиппова [79].

Нелинейные интегрируемые уравнения и метод обратной задачи рассеяния, разработанный для их решений, распахнули новые горизонты в математической физике конца двадцатого века. Это утверждение – вовсе не преувеличение. Достаточно взглянуть на длинные списки статей об интегрируемых уравнениях, приводимые в монографиях. С одной стороны, большое число работ связано с модной темой, и как следствие – появлением новых журналов и выделением фондов на исследования в области нелинейных уравнений. Однако, это только внешняя сторона. На самом деле, причина кроется в методе решения интегрируемых уравнений с помощью обратной задачи рассеяния. Он привел к переосмыслению некоторых известных результатов, а также постановке новых задач.

Метод обратной задачи рассеяния обычно связывает нелинейное уравнение с парой систем линейных уравнений с переменными коэффициентами и дополнительным "спектральным"параметром. Для каждого нелинейного уравнения эта пара своя. Более того, каждому решению нелинейного уравнения соответствует свой вид коэффициентов в системах линейных уравнений. То есть, для изучения свойств решения или какого-либо класса решений нелинейного интегрируемого уравнения с помощью метода обратной задачи рассеяния приходится развивать теорию решений класса линейных систем уравнений с переменными коэффициентами и исследовать свойства их решений в зависимости от дополнительного "спектрального"параметра. Теперь осталось вспомнить, что построение такой теории для одного обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + q(x)u = k^2u$$

длится более ста лет и пока далеко от завершения.

Вместо исследования столь широкого круга задач обычно ограничиваются изучением свойств решений небольшого списка интегрируемых уравнений. Среди (1+1)-мерных уравнений (одна пространственная переменная и временная) обычно говорят об уравнении Кортевега-де Фриза, нелинейном уравнении Шредингера, уравнении синус-Гордона, системе N-волн. Ограничен и список классов изучаемых решений. Прежде всего это точные решения, имеющие конечное число параметров – солитонные и конечнозонные.

Получить решение в виде уединенной волны (солитона) с помощью редукции к обыкновенному уравнению для перечисленных интегрируемых уравнений достаточно просто. Такое решение было найдено Буссинеском [99]. Нетривиален следующий шаг – построение решения, которое содержит несколько таких волн – солитонов. Преобразования, переводящие одно решение уравнения синус-Гордона в другое, были описаны Бэклундом в 1880 году (см., например [1]). Особенно активно такие преобразования изучаются, начиная с работы Миуры [136]. Построение конечнозонных решений интегрируемых уравнений, полученных С.П.Новиковым, опирается на метод обратной задачи рассеяния (см. [62, 22]), но может быть также сведено к решению системы интегрируемых обыкновенных уравнений.

Решения, содержащие функциональный произвол, позволяют решать задачи Коши или Гурса. В общем случае исследование свойств этих решений опирается на метод обратной задачи рассеяния. Перечисленные выше (1+1)-мерные нелинейные интегрируемые уравнения в методе обратной задачи связаны с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечные формулы для решений исходных нелинейных уравнений имеют неявный характер. Их неудобно использовать для каких-либо вычислений без дополнительного, как правило, асимптотического анализа. Более того, зачастую по смыслу исходной задачи интересным оказывается именно асимптотическое поведение решения нелинейного уравнения. Здесь нет возможности перечислить даже основные работы об асимптотиках убывающих решений (1+1)-мерных интегрируемых уравнений (см., например, [92, 84, 58, 25, 135, 30, 64, 65]). Формулы для асимптотик в (1+1)-мерном случае содержат один большой параметр, например, время и один медленно меняющийся, как правило, это отношение пространственной переменной и времени. Для получения равномерных по медленной переменной асимптотических решений используется сингулярная теория возмущений. Некоторые результаты, связанные с краевыми задачами, можно найти в [49, 55, 73, 80, 74, 6, 107, 38, 39].

Применение теории возмущений к интегрируемым уравнениям позволяет исследовать их неинтегрируемые возмущения. Наиболее полно исследованы возмущения солитонных решений. В теории возмущений солитонных решений один из основных вопросов – вычисление медленной модуляции параметров под воздействием возмущения в течение длительного временного промежутка. Главный член асимптотики, как правило, зависит от параметров решения аналитически. В частности, формальные асимптотические решения неинтегрируемых возмущений (1+1)-мерных уравнений с солитоном в главном члене изучались в

[121, 122, 36, 59, 125, 130, 35, 37, 126, 46], возмущения конечнозонных решений, например, в работах [105, 16, 50, 51, 17, 18, 19]. Приведенные здесь и в предыдущем абзаце ссылки ни в коей мере не претендуют на полноту.

Среди (2+1)-мерных интегрируемых уравнений (две пространственных переменных и время) чаще всего упоминаются уравнение Кадомцева-Петвиашвили, система Деви-Стюартсона, система N-волн. К этому короткому списку трудно что-либо добавить, за исключением уравнения для двумеризованной цепочки Тоды, относящейся к дискретным (2+1)-мерным моделям. При решении (2+1)-мерных уравнений возникают дополнительные сложности. В отличие от (1+1)-мерных уравнений (2+1)-мерные связаны с системами линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Дополнительный "спектральный" параметр входит в решение вспомогательной линейной системы через краевые условия. По этим причинам формулы решений задач для двумерных интегрируемых уравнений более сложны. Вопрос исследования асимптотических свойств решений (2+1)-мерных уравнений в настоящее время весьма актуален.

При построении асимптотик решений (2+1)-мерных нелинейных уравнений возникают существенные трудности. В первую очередь это связано с зависимостью от дополнительной пространственной переменной. При построении равномерных асимптотик встают задачи с двумя малыми параметрами, не связанными какими-либо соотношениями. Поэтому приходится иметь дело с двойными асимптотиками. Одним из наиболее действенных методов в этой области является метод согласования асимптотических разложений (см., например, [29]). Еще одно затруднение связано с неаналитической зависимостью вспомогательной линейной задачи от "спектрального параметра". Теория возмущений таких задач существенно отличается от хорошо разработанной теорий возмущений для задач с аналитической зависимостью от параметров (см., например, [120]).

По существу основным мотивом работ, результаты которых вошли в диссертацию, было желание развить асимптотические методы и теорию возмущений солитонных решений для (2+1)-мерных интегрируемых уравнений.

0-1 Объект исследований

В диссертации исследованы убывающие по пространственным направлениям решения (2+1)-мерных (две пространственных переменных и время) интегрируемых уравнений. В качестве основных представителей таких уравнений выбраны уравнение Кадомцева-Петвиашвили:

$$\partial_x(\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) = -3\alpha^2\partial_y^2 u; \tag{1}$$

Деви-Стюартсона:

$$\begin{aligned} i\partial_t A + \partial_x^2 A + \alpha^2\partial_y^2 A + 2\kappa|A|^2 A + Ap = 0, \\ \partial_x^2 p - \alpha^2\partial_y^2 p = -4\kappa\partial_x^2(|A|^2), \;\; \kappa = \pm 1; \end{aligned} \tag{2}$$

а также Ишимори:

$$\begin{aligned} \partial_t\vec{S} + \vec{S}\times(\partial_x^2\vec{S} + \alpha^2\partial_y^2\vec{S}) + \partial_x w\partial_y\vec{S} + \partial_y w\partial_x\vec{S} = 0 \\ \partial_x^2 w - \alpha^2\partial_y^2 w + 2\alpha^2\vec{S}(\partial_x\vec{S}\times\partial_y\vec{S}) = 0, \\ \vec{S} = (S_1, S_2, S_3), \;\; \vec{S}^2 = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Во всех этих уравнениях $\alpha^2 = \pm 1$.

В диссертацию включены результаты о временной асимптотике убывающих решений этих уравнений, а также о возмущении солитонных решений уравнений Деви-Стюартсона.

0-2 Асимптотическая природа уравнений Кадомцева-Петвиашвили и Деви-Стюартсона

Происхождение уравнений Кадомцева-Петвиашвили (КП) и Деви-Стюартсона (ДС) тесно связано с теорией волн и асимптотическими методами. Уравнение КП и система уравнений ДС являются нелинейными интегрируемыми асимптотическими пределами более сложных, до сих пор непроинтегрированных уравнений.

Уравнение КП было получено в работе [32] при исследовании устойчивости уединенной волны на поверхности жидкости, слабо модулированной в поперечном направлении. Ниже показано, как это уравнение выводится формально при рассмотрении модуляции волн малой амплитуды на больших временах в нелинейном волновом уравнении:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + au_x u_{xx} + \varepsilon^2 b u_{xxxx} = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Если искать решение в виде:

$$u(x, y, t; \varepsilon) = \varepsilon^2 u_1(x, \varepsilon y, t, \varepsilon t) + \varepsilon^4 u_2(x, \varepsilon y, t, \varepsilon t) + \dots, \tag{4}$$

тогда для членов порядка ε^2 и ε^4 получается система уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u_1 - \partial_{xx} u_1 = 0, \\ \partial_{tt} u_2 - \partial_{xx} u_2 = \partial_\eta^2 u_1 + \partial_x \partial_\xi u_1 - \partial_t \partial_\tau u_1 - a\partial_x u_1 \partial_x^2 u_1 + b\partial_x^4 u_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь через ξ и η обозначены медленные пространственные переменные $\xi = \varepsilon x$ и $\eta = \varepsilon y$.

Зависимость главного члена формальной асимптотики от переменных x и t легко определяется:

$$u_1(x, \varepsilon y, t, \varepsilon t) = w^+(x + t, \eta, \xi, \tau) + w^-(x - t, \eta, \xi, \tau).$$

Чтобы асимптотика (4) была пригодна для больших значений переменных $s^+ = x + t$ и $s^- = x - t$, необходимо избавиться от растущих по s^+ и s^- решений во втором уравнении из (5). Это приводит к двум уравнениям, определяющим зависимость функции u_1 от медленных переменных:

$$\partial_s\big(\pm 2\partial_\tau w^\pm + a w^\pm \partial_s w^\pm + b\partial_s^3 w^\pm\big) = \partial_\eta^2 w^\pm.$$

Каждое из этих уравнений и есть уравнение Кадомцева-Петвиашвили. Конечно, приведенных соображений недостаточно, чтобы утверждать, что решение уравнения КП играет важную роль в теории распространения волн. Нужно еще доказать, что построенная с его помощью асимптотика (4) действительно является асимптотикой решения исходного нелинейного волнового уравнения. Такое строгое обоснование вывода уравнения КП получено в работе Л.А. Калякина [33]. Формулировка результата имеется в обзоре [34].

Асимптотическую природу имеет и система уравнений Деви-Стюартсона. Эта система описывает взаимодействие длинной и короткой волн малой амплитуды на поверхности жидкости. Формальный вывод системы уравнений ДС из уравнений поверхностных волн для потенциального течения жидкости над ровным дном представляется более громоздким (см. [100], [101]), чем приведенный вывод уравнения КП. Однако, исходные предположения и окончательный результат будут полезны для выяснения естественных постановок задач для уравнений ДС.

Пусть P–потенциал скорости внутри бесконечного в направлениях x и y слоя жидкости. Глубина h этого слоя конечна. Уравнение потенциального течения

$$\Delta P = 0.$$

На дне выполняется так называемое условие непротекания

$$\partial_z P|_{z=-h} = 0.$$

Поверхность жидкости свободна. На этой поверхности $z = \zeta(x, y, t)$. Скорость жидкости в вертикальном направлении выражается в виде:

$$\partial_z P = \partial_t \zeta + \partial_x P \partial_x \zeta + \partial_y P \partial_y \zeta.$$

Кроме этого на свободной поверхности выполняется еще и закон сохранения:

$$2g\zeta + 2\partial_t P + (\partial_x P)^2 + (\partial_y P)^2 + (\partial_z P)^2 = 0.$$

Формальное асимптотическое решение уравнения Лапласа с условием непротекания на дне и двумя условиями на поверхности жидкости можно искать в виде

$$P = \varepsilon\Big(p_{01} + p_{11}E + C.C.\Big) + \dots,$$

форму свободной поверхности в виде:

$$\zeta = \varepsilon\Big(p_{01} + \zeta_{11}E + C.C.\Big) + \dots,$$

где $E = \exp(i(ky + \omega t))$, функции p_{ij} и ζ_{ij} зависят от медленных переменных $\xi = \varepsilon(x + c_g t)$, $(c_g = \text{const})$, $\eta = \varepsilon y$ и $\tau = \varepsilon^2 t$; значки $C.C.$ в формулах означают комплексно сопряженные слагаемые; многоточия – слагаемые меньшего порядка по ε.

Следуя работе А. Деви и К. Стюартсона [100], можно получить необходимые условия пригодности асимптотического разложения. Эти условия имеют вид уравнений ДС в форме:

$$i\partial_\tau A + \lambda\partial_\xi^2 A + \mu\partial_\eta^2 A + \nu|A|^2 A + \nu_1 A p = 0,$$
$$\alpha\partial_\xi^2 p + \beta\partial_\eta^2 p = \kappa\partial_\nu^2(|A|^2),$$

где $\lambda, \mu, \nu, \nu_1, \alpha, \beta$ – некоторые постоянные. Функции p_{01} и p_{11} связаны с p и A формулами:

$$p_{11} = \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} A(\xi,\eta,\tau), \quad p = \alpha_1\partial_\xi p_{01} + \beta_1|a|^2, \ \alpha_1, \beta_1 = \text{const}.$$

Для некоторого соотношения постоянных эта система уравнений может быть приведена к интегрируемой системе уравнений ДС (2) при $\alpha^2 = -1$ (конечно в (2) надо заменить переменные x, y, t на ξ, η, τ соответственно). В этом случае система (2) обычно называется системой уравнений ДС-2.

Другой вид интегрируемой системы уравнений ДС с $\alpha^2 = 1$ называется системой уравнений ДС-1. Эта система уравнений выведена в работе В.Д. Джорджевика и Л.Дж. Редекоппа [101] также из уравнений поверхностных волн при учете поверхностного натяжения.

Замечание 1. *Уравнения Ишимори (3) были получены как пространственно-двумерное обобщение уравнений магнетика Гейзенберга [118].*

0-3 Постановки задач

Естественные постановки задач для уравнений КП и ДС можно получить из их связи с исходными уравнениями теории волн. Из преобразований координат, приводящих исходные задачи теории волн к уравнениям КП и ДС, легко видеть, что роль времени играет медленное время исходной задачи, а роль пространственных переменных – медленные пространственные переменные в линейной комбинации с медленным временем задачи из теории волн. Поэтому задача Коши выглядит естественной для уравнений КП и ДС.

Вопрос о том, к каким задачам можно свести с помощью асимптотических процедур краевые задачи для нелинейной теории волн, не совсем ясен и представляется достаточно интересным. Без всякого отношения к этому, краевые задачи для уравнений Деви-Стюартсона и Ишимори оказываются интересными и с точки зрения свойства интегрируемости. В этом аспекте они рассматривались И.Т. Хабибуллиным [81, 82].

В диссертации приведены результаты о временной асимптотике решений начальных задач для уравнений КП, ДС и Ишимори.

Теоремы о существовании решений задач Коши для уравнений КП и ДС в различных классах функций получены А.В. Фаминским, Дж. Чидаглия и Дж. Саутом, М.М.Шакирьяновым [77, 113, 86]. Асимптотические свойства решений уравнений Деви-Стюартсона в неинтегрируемом случае и обобщенного уравнения Кадомцева-Петвиашвили изучались в работах Н.Хаяши, П. Наумкина, Дж. Саута, Х. Хираты [116, 115].

0-4 Метод обратной задачи рассеяния

Для построения решений нелинейных интегрируемых уравнений используется метод обратной задачи рассеяния. Впервые метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был применен к интегрированию нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) в работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [112]. Позднее В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом было показано, что прием, похожий на использованный в [112] для решения уравнения КдФ, можно применить и к нелинейному уравнению Шредингера [27]. Далее в работах М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла, Х.Сегура [91] и В.Е.Захарова и А.Б.Шабата [28] метод обратной задачи рассеяния был развит для целого класса нелинейных уравнений. В частности, интегрируемость методом обратной задачи уравнения КП была показана в работах В.С.Дрюма [21] и В.Е.Захарова и А.Б.Шабата [28].

Наиболее развит алгоритм решения для задач с начальными условиями. В работе А. Фокаса и М. Абловица [106] разработан формальный метод решения уравнений ДС для начальных задач с достаточно малым и быстро убывающим по всем пространственным направлениям начальным условием для функции A и нулевым условием на бесконечности по пространственным переменным для функции p. Позднее, А. Фокасом и П. Сантини в статье [109] был предложен метод решения начально-краевой задачи для уравнения ДС-1 с ненулевым краевым условием для функции p. Такое обобщение оказалось важным для описания с помощью МОЗР так называемых дромионов – уединенных волн, найденных ранее в [95]. Подробное исследование обратных задач для гиперболических уравнений, связанных с ДС-1 и цепочкой Тоды, проведено в монографии Л.П. Нижника [61]. Алгоритм решения уравнения КП в предположении, что решение достаточно быстро убывает по всем пространственным направлениям, развит в М. Абловицем, Бар Яковым и А. Фокасом [88]. Метод обратной задачи рассеяния для обобщенных уравнений ДС и Ишимори был развит в работах Б.Г.Конопельченко, И.Е. Маткаримова и В.Г.Дубровского [131, 103].

Среди других многомерных интегрируемых уравнений следует отметить уравнения N-волн. Это система N гиперболических уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью специального вида. Система уравнений N-волн получена при асимптотическом анализе N гармоник при наличии квадратичного резонанса [5]. Интегрируемость этой системы методом обратной задачи рассеяния обсуждалась в [89]. Метод обратной задачи рассеяния для многомерной системы уравнений N-волн исследовался в статьях Д.Каупа, А. Фокаса и Л.Сана [124, 110].

Число найденных интегрируемых многомерных уравнений различного вида достаточно велико (см. например, диссертацию В.Г. Дубровского [23]). Большинство из них рассматриваются как абстрактные нелинейные многомерные модели и не имеет столь явной физической интерпретации, как, например, уравнения ДС, КП или N-волн.

Стандартная схема метода обратной задачи подразумевает, что свойства начальной функции (гладкость и, например, убывание на бесконечности) сохраняются в динамике. Это обычно надо либо доказывать для каждого уравнения отдельно, либо, как например, в монографии Л.П. Нижника [61], а также в работах М. Викенхаузера, А.Фокаса и Л.Сана [141, 110], исследовать связь между данными рассеяния, классом начальных функций и свойствами решения при ненулевом значении времени. Однако, результаты в этом направлении пока нельзя считать исчерпывающими. С современным состоянием исследований для уравнения КП-1 можно ознакомиться, например, по обзору М. Боити, Ф. Пемпинелли, А. Погребкова и Б. Принари [97].

0-5 Асимптотики решений с функциональным произволом

Трудности в исследовании решений начальных задач для нелинейных интегрируемых уравнений вызваны неявным представлением решения и громоздкими формулами, связывающими начальные данные и данные рассеяния, которые оказываются более удобными для исследования свойств решения. Поэтому вместо исследования свойств решения начальной задачи для класса начальных условий обычно рассматривают классы решений нелинейных интегрируемых уравнений в терминах данных рассеяния. Класс решений, как правило, допускает функциональный произвол в терминах данных рассеяния и поэтому соответствует классу начальных условий тоже с функциональным произволом. Такой подход оказался достаточно эффективным как для одномерных интегрируемых уравнений, так и для многомерных. В частности, он позволяет исследовать асимптотики решений уравнений Кадомцева-Петвиашвили и Деви-Стюартсона с различной степенью строгости. Видимо, первыми в этом направлении были работа С.В. Манакова, П.М. Сантини и Л.А. Тахтаджяна [133], в которой построено убывающее формальное асимптотическое решение уравнения КП-1 и статья В.Ю. Новокшенова [65], где построена асимптотика решения для уравнения двумеризованной цепочки Тоды. Равномерные по пространственным переменным асимптотики убывающих решений уравнений ДС и уравнения КП-2 получены в работах автора [43, 42, 129]. Асимптотические свойства неубывающих решений с функциональным произволом для уравнений КП-1 и КП-2 в области перестройки – фронта решений – исследовались в работах И.А.Андерса, В.П.Котлярова, Е.Я.Хруслова, Д.Ю.Остапенко и А.П.Паль-Валя [3], [68].

Временные асимптотики решений уравнений Ишимори, видимо, впервые выписаны в предлагаемой диссертации. Впрочем, они легко получаются из асимптотики решения вспомогательной линейной задачи, связанной с уравнениями ДС. Формула, связывающая решение вспомогательной линейной задачи для уравнений ДС с решением уравнений Ишимори, приведена, например, в [131].

0-6 Решения с конечным числом параметров

Наиболее известные результаты в области нелинейных интегрируемых уравнений, достигнутые с помощью метода обратной задачи рассеяния – это явные формулы для решений. Простейшие из них обычно называются солитонами, несмотря на существенные различия в природе и свойствах этих решений. Видимо, самыми простыми найденными солитонными решениями уравнений КП и ДС являются так называемые алгебраические солитоны или лампы. Они построены в работе С.В. Манакова, В.Е. Захарова, Л.А. Бордаг, А.Р. Итса и В.Б. Матвеева [134] для уравнения КП-1 и в работе А. Фокаса и М. Абловица [106] для уравнений ДС-2. Отметим, в [106] были построены только сингулярные алгебраические лампы, позднее В.А. Аркадьевым, А.К. Погребковым и М.С. Поливановым [93] были найдены и регулярные алгебраические решения, убывающие во всех пространственных направлениях. Экпоненциально убывающие солитонные решения уравнения КП-2 найдены в [134]. Локализованные, экспоненциально убывающие во всех пространственных направлениях решения уравнений ДС-1, были построены М.Боити, Дж.Леоном, Л.Мартиной и Ф.Пемпинелли [95]. Еще один класс решений с конечным числом параметров для нелинейных интегрируемых уравнений, обычно обсуждающийся в работах по методу обратной задачи рассеяния – условно периодические, так называемые конечнозонные решения. Эти решения обычно выражаются через тэта-функции нескольких переменных. Для уравнений КП такие решения изучались в работах И.М. Кричевера [48, 53]. Перечисленные решения содержат конечное число свободных параметров. Кроме них для уравнений КП известен набор решений с произволом в виде функции одной переменной. Обзор различных решений уравнений КП и методов их построения имеется в книге [26]. Точные решения уравнений Деви-Стюартсона с помощью преобразований Беклунда построены, например, в работах Дж. Сатсумы, М. Абловица, М. Салля, Я. Хиетаринты и Р. Хироты [139, 72, 117].

Явные формулы для некоторых решений уравнений Ишимори построены, например, в [131, 103]. Решения некоторых других 2+1-мерных интегрируемых можно найти в работах [104, 102], см., также, [23].

0-7 Задачи теории возмущений

Применение теории возмущений для 2+1-мерных интегрируемых уравнений связано с самим выводом уравнения Кадомцева-Петвиашвили [32]. В [32] Б.Б. Кадомцев и В.И. Петвиашвили показали, что плоская уединенная волна уравнения КП-2 неустойчива по отношению к поперечным возмущениям. Этот результат и открытие метода обратной задачи рассеяния для 2+1-мерных интегрируемых уравнений породили работы, в которых исследовалось явление поперечной устойчивости (см. например, [24, 7, 70]).

С другой стороны, интересна задача о возмущении двумерных солитонов 2+1-мерных интегрируемых уравнений. Возмущения этих решений разумно рассматривать как по отношению к начальным условиям, так и по отношению к уравнениям. Если рассматривать только возмущения точных решений, это существенно расширяет класс решений, поддающихся анализу. Если же исследовать еще и возмущения уравнений, тогда можно изучать более широкий класс уравнений, и, в какой-то мере, более адекватные математические модели физических процессов.

Задачи теории возмущений для 1+1-мерных интегрируемых уравнений на формальном уровне исследованы довольно подробно (см., например, [121, 36, 125, 130, 37]). Исследование возмущений 2+1-мерных решений началось сравнительно недавно. Известны формальные результаты о возмущении конечнозонных решений уравнения КП, полученные И.М.Кричевером [52, 53]. В классе убывающих решений результаты пока относятся только к уравнениям ДС, исследованным в совместных работах Р.Р.Гадыльшина и автора [10, 11, 111, 128].

Одна из причин, по которой исследование двумерных солитонов не проводилось до сих пор – не был разработан метод решения линеаризованных на ненулевом решении 2+1-мерных уравнений. Для линеаризованных 1+1-мерных уравнений в работах Д. Каупа, Дж. Кинера, Д.Маклафлина, В.С. Герджикова и Е.К. Христова был разработан метод решения, который является ничем иным, как методом Фурье для уравнений с переменными коэффициентами специального вида – получающихся линеаризацией 1+1-мерных нелинейных интегрируемых уравнений [122, 125, 13, 14]. Для линеаризованных 2+1-мерных интегрируемых уравнений такие результаты были получены позже – для линеаризованного на конечнозонном решении уравнения КП в работах И.М. Кричевера [52, 53], для линеаризованных на убывающих решениях уравнений ДС – в работах автора [44, 45]. Применение этих результатов позволило исследовать задачи о возмущении точных решений уравнений КП [52] и ДС [111], [128].

0-8 Результаты диссертации

В диссертацию включены следующие результаты, полученные автором:

- Формальное асимптотическое решений задачи о возмущении алгебраического солитона уравнения Деви-Стюартсона-2. Оказалось, что солитонная структура решения уравнения ДС-2 неустойчива по отношению к малому гладкому финитному возмущению начального условия. Показано, что возмущение приводит к бессолитонным данным рассеяния. Удалось построить главный член формального асимптотического решения, пригодный на временах порядка обратной величины параметра возмущения.

- Исследована асимптотика решения убывающего решения уравнений Деви-Стюартсона-2 на больших временах. Эта асимптотика и известные явные формулы, связывающие решения уравнений ДС-2 и Ишимори-1, позволили написать также и асимптотику при больших временах решения уравнений Ишимори-1.

- Построена и обоснована асимптотика на больших временах убывающего решения уравнения КП-2. На этом пути исследована асимптотика решения эллиптической системы уравнений второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами, связанная с обратной задачей для уравнения КП-2.

- Построена асимптотика на больших временах убывающего решения уравнения ДС-1. Для этого исследована асимптотика решения нелокальной задачи Римана с быстро осциллирующими коэффициентами.

- Построена теория возмущений гиперболической двумерной системы Дирака – вспомогательной линейной системы, связанной с уравнениями ДС-1. На базе решений двумерной системы Дирака построено обратимое преобразование для достаточно гладких интегрируемых функций. Это позволило разработать метод Фурье для решения линеаризованной системы уравнений ДС-1.

- Построено формальное асимптотическое решение возмущенной системы уравнений ДС-1 с солитоном в главном члене, пригодное на временах порядка обратной величины параметра возмущения.

Самостоятельную теоретическую ценность представляет ряд результатов, полученных в процессе решения поставленных в диссертации задач. С точки зрения темы диссертации они являются вспомогательными, так как связаны с линейными уравнениями. Однако, именно эта связь позволяет их рассматривать в более широком смысле. К таковым относятся:

- Приведенные в диссертации теоремы о представлении функции в виде интегралов по произведениям решений сопряженных двумерных систем Дирака как эллиптического, так и гиперболического типа. В частности, такие представления дают возможность решить линеаризованные уравнения Деви-Стюартсона методом Фурье. Кроме того, полученные интегральные представления распространяют известные результаты о возмущении данных рассеяния при возмущении потенциала для одномерного уравнения Шредингера, на двумерные системы Дирака.

- Формальная асимптотика по двум параметрам собственного значения интегрального оператора, связанного с двумерной эллиптической системой Дирака, неаналически зависящая от одного из параметров.

- Исследование решения краевой двумерной эллиптической системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами. В частности, построены и обоснованы равномерные асимптотики по четырем параметрам.

- Асимптотики многомерных интегралов типа Коши с быстро осциллирующей экспонентой.

Все перечисленные результаты новые.

0-9 Содержание работы

Диссертация состоит из введения, семи глав и списка литературы. В первой главе диссертации приведен известный формализм метода обратной задачи рассеяния для уравнений ДС-2, Ишимори-1 и КР-2. Здесь будем следовать изложению работ [93, 131, 88]. Для перечисленных уравнений этот формализм связан с так называемой $\bar{D}$-задачей. Для наших целей оказалось удобным переписать эту задачу в виде краевой задачи для эллиптической двумерной системы уравнений Дирака.

Во второй главе развита теория возмущений для системы уравнений ДС-2. В первой части этой главы доказана теорема существования решений краевой задачи для линейной вспомогательной эллиптической двумерной системы уравнений Дирака. Исследована асимптотика решений этой системы по дополнительному параметру, входящему в решение через краевое условие. Центральное место здесь занимает теорема об обратимом преобразовании, основанном на наборе функций, связанных с решениями системы Дирака. Оказывается, что эти функции одновременно являются и решениями линеаризованной системы уравнений ДС-2. Это позволяет решать линеаризованную систему уравнений методом Фурье.

Вторая и третья части второй главы посвящены построению формального асимптотического решения системы уравнений ДС-2 с солитонным начальным условием, возмущенным малой гладкой финитной функцией.

Во второй части второй главы показано, что солитонная структура обратной задачи соответствует нулевому собственному значению некоторого компактного интегрального оператора при значении дополнительного параметра $k = k_0$. С помощью формальных асимптотических построений получено, что возмущенный интегральный оператор не имеет нулевого собственного значения в окрестности точки $k = k_0$. Это говорит о структурной неустойчивости солитона системы ДС-2. Следующая, третья часть главы 2 посвящена построению асимптотического решения системы ДС-2 с начальным условием близким к солитонному. Показано, что несмотря на потерю солитонной структуры данными рассеяния, решение системы ДС-2 сохраняет солитонную форму в главном члене, вплоть до времен порядка обратной величины параметра возмущения.

Третья глава диссертации посвящена построению асимптотик убывающих решений уравнений ДС-2, Ишимори-1 и КП-2 при больших значениях времени. Построение этих асимптотик связано с построением решений эллиптической системы уравнений Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами. Несмотря на сходство задач для системы Дирака, построение асимптотики решения уравнения КП-2 существенно сложнее, чем соответствующие асимптотики для уравнений ДС-2 и Ишимори-1. Это связано с различием фаз быстро осциллирующих экспонент в коэффициентах системы Дирака. Для уравнений ДС-2 и Ишимори-1 фаза имеет только одну стационарную точку, в то время, как для уравнения КП-2 – фазовая функция зависит от четырех параметров и в зависимости от их значений может иметь либо две простых стационарных точки, либо одну вырожденную. Построение асимптотики в окрестности вырожденной стационарной точки приводит к существенным усложнениям. Полученные в этой главе асимптотики решений нелинейных уравнений имеют огибающую порядка $O(t^{-1})$ и осциллируют. Определена зависимость огибающей от данных рассеяния и фаза осциллирующей экспоненты.

В четвертой главе диссертации приведен известный [109] формализм метода обратной задачи рассеяния, связанный с уравнениями ДС-1. Этот формализм использует задачу Гурса для двумерной гиперболической системы Дирака в прямой задаче рассеяния и так называемую нелокальную задачу Римана в обратной задаче рассеяния.

В пятой главе построена асимптотика при большом значении времени убывающего решения системы уравнений ДС-1. На этом пути получена асимптотика решения нелокальной задачи Римана с быстро осциллирующим коэффициентом.

В шестой главе изучалась теория возмущений для системы уравнений ДС-1. С помощью набора произведений решений гиперболической двумерной системы Дирака построено обратимое преобразование для достаточно гладких интегрируемых функций. Это позволило построить формальное асимптотическое решение системы ДС-1 с солитоном в главном члене асимптотики. Решение пригодно вплоть до времен порядка обратной величины параметра возмущения.

Седьмая глава диссертации содержит доказательства теорем об асимптотике многомерных интегралов. В первой части главы построена асимптотика интегралов со слабой особенностью. Во второй – интегралов типа Коши с быстро осциллирующей экспонентой в подынтегральной функции.

Глава 1

Метод обратной задачи и $\bar{D}$-проблема

Здесь приведены предварительные сведения – алгоритмы решения уравнений ДС-2, КП-2, и Ишимори-1 методом обратной задачи рассеяния. Эти уравнения объединены тем, что в МОЗР решение обратной задачи для них связано с решением эллиптической системы уравнений, обычно называемой $\bar{D}$-проблемой. В этом разделе не уделяется внимание вопросам существования решений с необходимыми свойствами. Формулы этого раздела достаточно хорошо известны. Они будут использоваться в дальнейшем при исследовании асимптотических свойств решений уравнений ДС-2, КП-2 и Ишимори-1.

1-1 Решение уравнения ДС-2

Систему уравнений ДС-2 мы будем рассматривать в виде:

$$\begin{aligned} i\partial_t q + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2)q + (g + \overline{g})q = 0, \\ \partial_{\bar{z}} g = -\kappa \partial_z |q|^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Черта означает комплексное сопряжение.

Уравнения ДС-2 в таком виде были рассмотрены в работе [93]. Эту форму уравнений можно получить из стандартной (2) при $\alpha^2 = -1$. Для перехода к уравнениям (1.1) надо сделать замены: $z = x + iy$,

$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, функцию $A(x,y,t)$ заменить на $q(z,t)$, функция g связана с функциями p и A формулой: $\partial_x g = \frac{1}{2}(\partial_y p + i\partial_x p) + \kappa\partial_x |A|^2$.

Система уравнений (1.1) является условием существования совместного решения систем уравнений:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q(z,t) \\ \overline{\kappa q(z,t)} & 0 \end{pmatrix} \phi \tag{1.2}$$

и

$$\partial_t \phi = \begin{pmatrix} 2i\partial_z^2 + ig & i\phi_2\partial_z q - iq\partial_{\bar{z}} \\ i\kappa\partial_z \bar{q} + i\kappa\bar{q}\partial_z & -2i\partial_{\bar{z}}^2 - ig \end{pmatrix} \phi. \tag{1.3}$$

Ниже кратко изложена часть результатов работ [106, 93].

1.1.1 Прямая задача рассеяния для уравнения ДС-2 и эволюция элементов T-матрицы

Прямой задачей рассеяния обычно называется задача о построении матричного решения системы уравнений (1.2), удовлетворяющего краевому условию

$$E(-kz)\phi(k,z)|_{|z|\to\infty} = I, \tag{1.4}$$

и вычисление связанных с этим решением так называемых данных рассеяния. В (1.4) приняты обозначения:

$$E(zk) = \begin{pmatrix} \exp(kz) & 0 \\ 0 & \exp(\overline{kz}) \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Иногда удобно вместо краевой задачи (1.2), (1.4) рассматривать эквивалентную ей систему интегральных уравнений [93]:

$$(I - G[q,k])\phi = E(kz), \tag{1.5}$$

где $G[q,k]$ – интегральный оператор:

$$G[q,k]\phi = \frac{1}{4i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} d\xi \wedge d\bar{\xi} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{q(\xi)\exp(k(z-\xi))}{z-\xi} \\ \frac{\kappa\bar{q}(\xi)\exp(\overline{k(z-\xi)})}{\overline{z-\xi}} & 0 \end{pmatrix} \phi(\xi,k). \tag{1.6}$$

Можно заметить, что для матрицы ϕ справедлива формула [93]:

$$\phi = \sigma^{-1}\overline{\phi}\sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Существование и аналитические свойства решения краевой задачи (1.2), (1.4) определяются потенциальной функцией $q(z)$. Для простоты предположим, что краевая задача разрешима при любых $k \in C$. С решением краевой задачи и функцией $q(z)$ в методе обратной задачи связывается T-матрица [93]:

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \kappa\overline{b(k)} & \overline{a(k)} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{-i}{4\pi}\int\int_C dz \wedge d\bar{z} \begin{pmatrix} q(z)\phi_{21}\exp(-kz) & q(z)\phi_{22}\exp(-kz) \\ \kappa\bar{q}(z)\phi_{11}\exp(-\overline{kz}) & \kappa\bar{q}(z)\phi_{12}\exp(-\overline{kz}) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Функцию $b(k)$ из этой матрицы обычно называют данными рассеяния. Построением T-матрицы заканчивается этап решения прямой задачи рассеяния. Следующий шаг – выяснение зависимости элементов этой матрицы от времени, при условии, что зависимость функции q от времени определяется уравнениями Деви-Стюартсона. В этом случае матрица ϕ удовлетворяет системе уравнений (1.3). Вычисление производной по времени после некоторых преобразований интегралов приводит к формулам ([93]):

$$\partial_t b = 2i(\bar{k}^2 + k^2)b, \qquad \partial_t a = 0. \tag{1.9}$$

Замечание 2. *При вычислении эволюции элементов матрицы рассеяния в [93] предполагается, что все интегралы, в промежуточных выражениях сходятся равномерно по времени. Это дополнительное предположение о свойствах решения уравнений ДС-2 выполняется для некоторых классов решений. В терминах функций переменной $z \in \mathbb{C}$ эти классы в общем виде до сих пор не описаны.*

1.1.2 Обратная задача рассеяния

Замечательное наблюдение, сделанное в [106], состоит в том, что наряду с эллиптической системой уравнений по z и $\bar{z}$ матрица, составленная из функций ϕ_{ij}, удовлетворяет еще краевой задаче:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{k}} & 0 \\ 0 & \partial_k \end{pmatrix} \phi^T = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\bar{b}(k,t) \\ b(k,t) & 0 \end{pmatrix} \phi^T, \quad E(-kz)\phi^T|_{|k|\to\infty} = I. \quad (1.10)$$

Здесь ϕ^T – транспонированная матрица ϕ.

Краевая задача (1.10) обычно называется $\bar{D}$-задачей. Она позволяет определить зависимость матриц-функции ϕ через данные рассеяния.

Бывает удобно рассматривать вместо (1.10) систему интегральных уравнений:

$$(I - 2G[\kappa\bar{b}, k])\phi^T = E(kz), \quad (1.11)$$

Задача построения решения (1.10) и вычисление функций $q(z,t)$ и $g(z,t)$ по формулам

$$q(z,t) = \frac{-i}{\pi} \int\int_C dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(2it(p^2 + \bar{p}^2) - \overline{pz})\phi_{11}(p,z,t), \quad (1.12)$$

$$g = -V.P. \int\int_C \frac{dv \wedge d\bar{v}\, |q(v,t)|^2}{2\pi i (v-z)^2} \quad (1.13)$$

называется обратной задачей рассеяния для уравнений ДС-2.

Замечание 3. *Из-за того, что для данных рассеяния эволюционная задача линейна, классы решений уравнений ДС-2 удобно определять в терминах данных рассеяния – функции $b(k)$. Поэтому задача об исследовании свойств решений нелинейных интегрируемых уравнений часто формулируется в терминах данных рассеяния. Вопрос о сопоставлении классов начальных данных и классов данных рассеяния относится не столько к эволюционным нелинейным уравнениям, сколько к спектральной теории для краевой задачи (1.2).*

1.1.3 Солитонные решения

Солитоны в решении уравнений ДС-2 возникают тогда, когда решение прямой задачи рассеяния (1.2) имеет особенности первого порядка в некоторых точках $k = k_j$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь для простоты рассмотрим случай, когда есть только одна такая особая точка и, соответственно, один солитон. Случай n солитонного решения описан в [93].

Обозначим особую точку решения k_0. Разложим в окрестности этой особой точки функцию ϕ в ряд по степеням $k - k_0$. В соответствии с нашим предположением это разложение начинается с членов порядка $(k - k_0)^{-1}$. Если подставить разложение в интегральное уравнение (1.5) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $(k - k_0)$ получим, что коэффициент при главном члене разложения решения по $k - k_0$ в окрестности точки k_j является решением однородной системы интегральных уравнений:

$$A - G[q, k_0]A = 0. \tag{1.14}$$

Обозначим через $A_{(1)}$ столбец – решение этого уравнения– для определенности нормированный в соответствии с условием:

$$\begin{pmatrix} \partial_k & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{k}} \end{pmatrix} G[q, k]\Big|_{k=k_0} A_{(1)}(z) = \begin{pmatrix} \exp(zk_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что столбец, полученный по формуле

$$A_{(2)} = \sigma\overline{A_{(1)}}$$

также является решением системы уравнений (1.14).

Ниже удобно перейти от матрицы ϕ к рассмотрению только первого столбца этой матрицы $\phi_{(1)}$. Зная первый столбец, второй столбец легко восстановить по формуле

$$\phi_{(2)} = \sigma\overline{\phi_{(1)}}.$$

В самом простом случае в окрестности k_0 столбец $\phi_{(1)}$ может быть представлен в виде [106, 93]:

$$\phi_{(1)}(z, k)|_{k\to k_0} = \frac{A_{(1)}(z)}{k - k_0} + O(1).$$

Гладкая часть первого столбца $\phi_{(1)}$ в окрестности точки k_0 может быть представлена в виде [93]:

$$\partial_k\big[(k - k_0)\phi_{(1)}(k, z)\big]|_{k=k_0} = \mu A_{(1)}(z) + \nu\sigma\overline{A_{(1)}(z)}.$$

Набор параметров k_0, μ, ν называется дискретной частью данных рассеяния, функция $b(k)$ – непрерывной частью данных рассеяния. Параметр k_0 не меняется со временем, зависимость от времени остальных параметров дискретной части данных рассеяния [93]:

$$\mu(t) = \mu + 4ik_0 t, \quad \nu(t) = \nu \exp(-2it(k_0^2 - \bar{k}_0^2)).$$

Если данные рассеяния содержат дискретную (солитонную) часть, тогда прежде чем решать $\bar{D}$-задачу матрицу ϕ надо регуляризовать – вычесть из нее сингулярные слагаемые. В результате мы получим $\bar{D}$-задачу для регулярной функции во всей комплексной плоскости. Для первого столбца $\phi_{(1)}$ эта задача сводится к интегральному уравнению [93]:

$$\phi_{(1)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(A_{(1)}\right)_j}{k - k_j} \exp((k - k_j)z) = E_{(1)}(kz) +$$
$$+\frac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dp \wedge d\bar{p}}{k - p} \bar{b}(p) \exp((k - p)z) \sigma \overline{\phi_{(1)}}(p, z). \tag{1.15}$$

Однако, этого уравнения недостаточно. Для однозначного построения решения необходимо воспользоваться соотношением для гладкой части $\phi_{(1)}$ в окрестности k_0[93]:

$$E_{(1)}(k_0 z) + \frac{1}{2i\pi} V.P. \int\int_{\mathbb{C}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{k_j - \zeta} \bar{b}(\zeta) \exp(-it(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) + z(k_0 - \zeta)) \times$$
$$\times \sigma \overline{\phi_{(1)}}(\zeta, z, t) = (z + \mu) A_{(1)}(z) + \nu \sigma \overline{A_{(1)}}(z). \tag{1.16}$$

Здесь важно заметить, что интеграл в смысле главного значения существует, так как вблизи особенности k_j функция $\bar{b}(k)$ может быть представлена в виде $\bar{b}(k) = \frac{\overline{k - k_0}}{k - k_0} \overline{\tilde{b}(k)}$, где $\tilde{b}(k)$ – регулярна в окрестности точки k_j [93].

Формула для функции $q(z, t)$ в этом случае имеет вид:

$$q(z, t) = \frac{-i}{\pi} \int\int_C dp \wedge d\bar{p}\, b(p) \exp(2it(p^2 + \bar{p}^2) - \overline{pz}) \phi_{11}(p, z, t) -$$
$$-\overline{(A_{(1)})_2(z) \exp(-k_0 z)} \tag{1.17}$$

В самом простом случае непрерывная часть данных рассеяния – функция $b(k)$ – тождественно равна нулю на всей комплексной плоскости. Тогда система уравнений (1.16) легко решается. Матрица, составленная из решений однородного интегрального уравнения (1.14):

$$A(z) = \left[A_{(1)}, A_{(2)}\right](z) = \begin{pmatrix} \frac{\overline{(z-\mu)}\exp(zk_0)}{|z+\mu|^2-\kappa|\nu|^2} & \frac{\bar{\nu}\exp(zk_0)}{|z+\mu|^2-\kappa|\nu|^2} \\ \frac{\nu\exp(\overline{zk_0})}{|z+\mu|^2-\kappa|\nu|^2} & \frac{(z-\mu)\exp(\overline{zk_0})}{|z+\mu|^2-\kappa|\nu|^2} \end{pmatrix}; \tag{1.18}$$

$$\phi = E(kz) - \begin{pmatrix} \frac{\exp((k-k_0)z)}{k-k_0} & 0 \\ 0 & \frac{\exp(\overline{(k-k_0)z})}{\overline{k-k_0}} \end{pmatrix} A(z). \tag{1.19}$$

Односолитонное решение уравнений Деви-Стюартсона ([93]):

$$q(z,t) = \frac{2\bar{\nu}\exp(-it(k_0^2+\bar{k}_0^2) + k_0 z - \overline{k_0 z})}{|z+4ik_0 t+\mu|^2 - \kappa|\nu|^2},$$

$$g(z,t) = \frac{-4\overline{(z++4itk_0+\mu)^2}}{(|z+4itk_0+\mu|^2-\kappa|\nu|^2)^2}. \tag{1.20}$$

1-2 Решение уравнений Ишимори-1

Для уравнений Ишимори-1 (в (3) $\alpha^2 = 1$) метод обратной задачи рассеяния изложен, например, в [131]. Здесь, вместо того, чтобы приводить его полностью, воспользуемся формулой, связывающей решения уравнений Ишимори и решения вспомогательной линейной задачи (1.2) для уравнений ДС-2.

Следуя [131], обозначим $\tilde{S} = \vec{S}\vec{\sigma}$, где $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, а $\sigma_{1,2,3}$ – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{S} = -\phi^{-1}\sigma_3\phi, \tag{1.21}$$

где ϕ – решение краевой задачи (1.2) с потенциалом, q – решением уравнений ДС-2.

1-3 Решение уравнения КП-2

Свойства решений и процедура интегрирования уравнения КП (1) зависят от знака α^2. В случае $\alpha^2 = 1$ это уравнение называется КП-2. Формализм МОЗР для уравнения КП-2 был предложен в [88]. Решение задачи

Коши для (1) с помощью метода обратной задачи рассеяния состоит из двух этапов. Первый – решение прямой задачи рассеяния – состоит в построении решения краевой задачи:

$$-\partial_y\varphi + \partial_x^2\varphi + 2ik\partial_x\varphi + u\varphi = 0, \quad \varphi|_{|k|\to\infty} = 1, \tag{1.22}$$

и вычисления данных рассеяния по формуле:

$$\begin{aligned} b(k) = \quad & \tfrac{\operatorname{sgn}(-\Re(k))}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y)\varphi(x,y,k,0) \times \\ & \times \exp(-i(k+\bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y). \end{aligned}$$

Здесь $u_0(x,y)$ – начальное условие.

Замечание 4. *Здесь мы будем считать, что решение задачи (1.22) не имеет особенностей при $k \in \mathbb{C}$. Для экспоненциально убывающих функций $u_0(x,y)$ в [114] показано, что задача (1.22) разрешима при $k \in \mathbb{C}$.*

Следующий этап – решение обратной задачи рассеяния. На этом этапе определяется зависимость данных рассеяния от времени - она имеет вид

$$b(k;t) = b(k)\exp(4it(k^3 + \bar{k}^3)).$$

Обратная задача рассеяния для уравнения КП-2 обычно ассоциируется с нелокальной $\bar{D}$-задачей – решением функционально-дифференциального уравнения [88]:

$$\partial_{\bar{k}}\varphi(x,y;k) = b(k;t)\varphi(x,y,-\bar{k})\exp(i(k+\bar{k})x - i(k^2 - \bar{k}^2)y). \tag{1.23}$$

Однако, нам удобнее рассматривать вместо (1.23) систему эллиптических уравнений, как и в случае обратной задачи для уравнений ДС-2. Для перехода от уравнения (1.23) к системе уравнений обозначим:

$$\psi(x,y;k,t) = \varphi(x,y;-\bar{k},t)\exp(i(k+\bar{k})x - i(k^2 - \bar{k}^2)y).$$

Тогда для функций φ и ψ получим $\bar{D}$-задачу:

$$\begin{matrix} \partial_{\bar{k}}\varphi = \psi\, b(-\bar{k})\exp(itS), \\ \partial_k\psi = -\varphi\, b(k)\exp(-itS); \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}|_{|k|\to\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Здесь $S = 4(k^3 + \bar{k}^3) + (k + \bar{k})\xi - i(k^2 - \bar{k}^2)\eta, \quad \xi = x/t$, $\eta = y/t$, функция $b(k)$ – неаналитическая функция комплексной переменной $k \in \mathbb{C}$.

Последний шаг в решении уравнения КП-2 состоит в вычислении интеграла, дающего решение исходной задачи Коши [88]:

$$u(x, y, t) = \partial_x \int\int_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k}\, b(k)\psi(k, x, y, t) \exp(itS). \tag{1.25}$$

Глава 2

Структурная неустойчивость солитона ДС-2

В этой части рассмотрен вопрос об устойчивости задачи рассеяния по отношению к малому возмущению потенциала. Изучено два различных случая. Если потенциал в системе уравнений достаточно мал, тогда прямая и обратная задачи рассеяния оказываются устойчивыми. В разделе 2.1, следуя работе автора [128], подробно и строго исследован именно этот случай. Другой, несколько неожиданный результат, получен для солитонного потенциала, заведомо не удовлетворяющего условию достаточной малости из 2.1. Оказывается, что солитонная структура данных рассеяния неустойчива по отношению к малому финитному возмущению потенциала. Этот факт был замечен и исследован с помощью сингулярной теории возмущений на формальном уровне в работах Р.Р. Гадыльшина и автора [10, 11]. Подробному описанию результатов этих двух работ посвящен раздел 2.2. В разделе 2.3 также с помощью сингулярной теории возмущений, следуя еще одной совместной работе с Р.Р. Гадыльшиным [111], показано, к каким изменениям в решении уравнения ДС-2 ведет неустойчивость задачи рассеяния.

2-1 Однозначная разрешимость и устойчивость задачи рассеяния для эллиптической системы Дирака-

Основная часть раздела посвящена построению обратимого преобразования (типа преобразование Фурье) для гладких интегрируемых функций двух вещественных переменных. Это преобразование построено с помощью функций, связанных с решением краевой задачи (1.2), (1.4). Операторы прямого и обратного преобразований позволяют исследовать прямую и обратную задачу для вариаций потенциала и вариаций данных рассеяния. Установленное однозначное соответствие между вариациями потенциала и вариациями данных рассеяния позволяет говорить об устойчивости преобразования рассеяния для потенциалов из указанного класса функций. Результаты этого раздела в кратком виде изложены в [128]. Здесь они приведены с подробными доказательствами.

Замечательное свойство образов функций состоит в их специфической эволюции по времени, если в задаче (1.2), (1.4) потенциал q эволюционирует в соответствии с решением уравнений ДС-2. Рассмотрим линеаризованную на q, g систему уравнений ДС-2 (лДС-2):

$$
\begin{gathered}
i\partial_t U + (\partial_z^2 - \partial_{\bar z}^2)U + (g+\bar g)U + (v+\bar v)q = iF, \\
\partial_{\bar z} v = \partial_z(\bar U q + U\bar q).
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Преобразование функции U, построенное с помощью решений задачи (1.2), (1.4), разделяет зависимость от пространственных переменных и времени, как это происходит в методе Фурье. Такое разделение переменных в рамках гамильтонова формализма обычно интерпретируют как следствие из существования переменных типа действие-угол для системы уравнений ДС-2 [54], [140].

Здесь обобщены на случай двух измерений результаты о полноте квадратов решений одномерной системы Дирака [122, 14]. С другой стороны, полученные здесь результаты открывают возможность полного исследования системы уравнений лДС-2 методом Фурье. Таким образом, распространен на 2+1-мерную (две пространственных переменных и время) систему уравнений лДС-2 известный подход к решению линеаризаций 1+1-мерных интегрируемых МОЗР уравнений [122, 125, 13, 14].

2.1.1 Теорема о разложении

Приведем формулу представления гладкой интегрируемой функции в виде интеграла типа Фурье по функциям, связанным с решением задачи (1.2), (1.4). Эту формулу удобно записать, воспользовавшись обозначениями для полуторалинейных форм:

$$(\phi_{(i)}, \psi_{(j)})_f = \int\int_{\mathbb{C}} dz \wedge d\bar{z} \left(\bar{f}(z)\, \phi_{1i}(z,k)\overline{\psi_{1j}}(z,k) + f(z)\, \phi_{2i}(z,k)\overline{\psi_{2j}}(z,k)\right), \tag{2.2}$$

$$\langle \phi^{(i)}, \psi^{(j)} \rangle_h = \int\int_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} \left(\overline{\phi_{i1}}(z,k)\psi_{j1}(z,k)\, \bar{h}(k) - \overline{\phi_{i2}}(z,k)\psi_{j2}(z,k)\, h(k)\right). \tag{2.3}$$

Здесь $\phi_{(i)}$ – i-тый столбец матрицы ϕ, $\phi^{(i)}$ – i-тая строка матрицы ϕ.

Основной результат раздела содержится в следующем утверждении.

Теорема 1 (О разложении(. *Пусть функция q в задаче (1.2), (1.4) такая, что q, $|q|$, $\partial_z q$, $\partial_{\bar{z}} q$, $\partial_z^2 q$, $\partial_{\bar{z}}^2 q$ – гладкие интегрируемые функции вещественных переменных $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ и выполнено условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int\int dxdy\, \frac{|q(x+iy)|}{|z-(x+iy)|} < 2\pi, \tag{2.4}$$

тогда функция $u \in C^1 \cap L_1$ представима в виде:

$$u(z) = \frac{-i}{\pi} \langle \phi^{(2)}, \psi^{(2)} \rangle_{\hat{u}}, \tag{2.5}$$

где коэффициенты разложения $\hat{u}(k)$ определены формулой:

$$\hat{u} = \frac{i}{4\pi} (\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_u. \tag{2.6}$$

Здесь ψ – решение задачи, сопряженной (1.2), (1.4) относительно полуторалинейной формы (2.2).

Замечание 5. *Условие (2.4) является достаточным для существования решения задачи (1.2), (1.4) при $\forall k \in \mathbb{C}$.*

Специальный характер эволюции решения задачи (1.2), (1.4), если q эволюционирует в соответствии с уравнениями ДС-2, позволяет воспользоваться разложением (2.5) для решения начально-краевой задачи для системы уравнений лДС-2.

Теорема 2 (О решении методом Фурье(. *Пусть q функция из решения системы (1.1) удовлетворяет условиям теоремы о разложении при $0 \leq t < T_0 = Const$, тогда функцию U из решения начально-краевой задачи для (2.1):*

$$U|_{t=0} = U_0(z), \quad v|_{|z|\to\infty} = 0 \tag{2.7}$$

можно представить в виде:

$$U(z, \bar{z}, t) = \frac{-i}{\pi} \langle \phi^{(2)}, \psi^{(2)} \rangle_{\hat{U}}, \tag{2.8}$$

где $\hat{U}$ – решение задачи Коши:

$$\partial_t \hat{U} - 2i(k^2 + \bar{k}^2)\hat{U} = \hat{F}(k, t), \quad \hat{U}|_{t=0} = \frac{i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{U_0},$$

здесь: $\hat{F}(k, t) = \frac{i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_F$.

2.1.2 Разрешимость прямой задачи рассеяния

Показано, что решение задачи (1.2), (1.4) существует при $\forall k \in \mathbb{C}$, если потенциал удовлетворяет условию (2.4). Заметим, что это условие позволяет рассматривать потенциальные функции q из более широкого класса, по сравнению с [109], где прямая задача рассматривалась для потенциалов из класса Шварца.

Теорема 3. *Пусть q удовлетворяет условию (2.4), тогда решение задачи (1.2), (1.4) существует при $\forall k \in \mathbb{C}$.*

Во второй части этого раздела построена асимптотика при $|k| \to \infty$ решения задачи (1.2), (1.4). В [93] эта асимптотика использовалась для построения функции q по данным рассеяния задачи (1.2), (1.4).

Теорема 4. *Пусть* q, $|q|$, $\partial_z q$, $\partial_z q$, $\partial_z^2 q$, $\partial_{\bar z}^2 q$ *– гладкие интегрируемые функции вещественных переменных* $x = \frac{1}{2}(z+\bar z)$, $y = \frac{1}{2i}(z-\bar z)$ *и* q *удовлетворяет условию (2.4), тогда решение задачи (1.2), (1.4) при* $|k| \to \infty$ *имеет вид:*

$$\phi_{11}(z,k) = (1 + \tfrac{1}{4k}\partial_{\bar z}^{-1}|q| \, + \, O(|k|^{-2}))\exp(kz),$$
$$\phi_{12}(z,k) = (-\tfrac{1}{2k}\bar q \, + \, O(|k|^{-2}))\exp(kz), \tag{2.9}$$

здесь

$$\partial_{\bar z}^{-1} f = \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dw \wedge d\bar w \, f(w)}{z-w}.$$

Для доказательства теоремы 3 перейдем от задачи (1.2), (1.4) к эквивалентной системе интегральных уравнений (1.5). Решение системы уравнений (1.5) будем искать в классе X' – непрерывных по z, $\bar z$ ограниченных матриц, первая строка которых дифференцируема по $\bar z$, вторая – по z. Норма определяется формулой:

$$||\phi|| = \max_{j=1,2} \sup_{z\in\mathbb{C}} (|E_{jj}(-kz)\phi_{j1}(z,k)| + |E_{jj}(-kz)\phi_{j2}(z,k)|).$$

Здесь $E_{lm}(-kz)$ и $\phi_{lm}(z,k)$ – элементы матриц $E(-kz)$ и ϕ соответственно.

Исследуем свойства оператора G в интегральном уравнении (1.5). Исходя из определения оператора G и пространства функций X', можно доказать утверждение:

Лемма 1. *Пусть* $\phi \in X'$, *тогда* $||G[q,k]\phi|| \le M||\phi||$, *где*

$$M = \frac{1}{4\pi} \sup_{z\in\mathbb{C}} \left| \int\int_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\bar\zeta \frac{|q(\zeta,\bar z)|}{|z-\zeta|} \right|.$$

Доказательство леммы. Оценка величины $||G[q,k]\phi||$ получается после прямой подстановки в выражение $G[q,k]\phi$ нормы ϕ. В результате получается доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Оператор G является оператором со слабым ядром, поэтому этот оператор непрерывные по z, $\bar z$ функции переводит в непрерывные см.[9], с.287. Кроме того, из формулы определения оператора G и формулы Коши-Грина следует, что он переводит непрерывные по $z, \bar{z}$ матриц-функции в матриц-функции с первой строкой, дифференцируемой по $\bar{z}$, второй – по z. Ограниченность оператора G следует из леммы 1. Тогда G – сжимающий оператор в пространстве X', если выполнено условие (2.4). Следовательно, интегральное уравнение (1.5) имеет решение при $\forall k \in \mathbb{C}$. Следовательно, разрешима и краевая задача (1.2), (1.4). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 состоит из двух частей. В первой части построена формальная асимптотика при $|k| \to \infty$ решения задачи (1.2), (1.4). Во второй части проводится оценка остатка асимптотики. Условие (2.4) используется только во второй части доказательства – при оценке остатка асимптотики.

Лемма 2. *Пусть q, $|q|$, $\partial_z q$, $\partial_z q$ – гладкие интегрируемые функции вещественных переменных $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, тогда формальное асимптотическое при $|k| \to \infty$ по $mod\, O(|k|^{-2})$ решение задачи (1.2), (1.4) имеет вид (2.9).*

Доказательство. Будем искать формальную асимптотику при $|k| \to \infty$ решения задачи (1.2), (1.4) в виде $E(kz)\varphi$, где:

$$\varphi = I + E(-kz)(\frac{1}{|k|}\chi + \frac{1}{|k|^2}\kappa). \tag{2.10}$$

Подставим (2.10) в (1.2), приравняем коэффициенты при $|k|^0$, $|k|^{-1}$. В результате получим:

$$\chi_{11} = \frac{-\bar{k}}{|k|}\partial_{\bar{z}}^{-1}(\frac{|q|^2}{4}), \quad \chi_{12} = \frac{k}{|k|}\,\frac{q}{2};$$

$$\chi_{21} = \frac{\bar{k}}{|k|}(-\frac{\bar{q}}{2}), \quad \chi_{22} = \frac{-k}{|k|}\,\partial_z^{-1}(-\frac{|q|^2}{4});$$

$$\kappa_{12} = \frac{|k|}{\bar{k}}(-\partial_{\bar{z}}\chi_{12} - \frac{q}{2}\,\chi_{22}),$$

$$\kappa_{21} = \frac{|k|}{k}(-\partial_z\chi_{21} - \frac{\bar{q}}{2}\,\chi_{11}).$$

Компоненты κ_{11} и κ_{22} не влияют на построение асимптотического решения по $\mathrm{mod}\, O(|k|^{-2})$. Для определенности примем их равными нулю. Лемма 2 доказана.

При дополнительном условии (2.4) удается доказать, что (2.10) является асимптотикой решения задачи (1.2), (1.4).

Доказательство теоремы 4. Будем искать решение (1.2), (1.4) в виде:

$$\phi = E(kz)\varphi + \frac{1}{|k|^2}\Phi. \tag{2.11}$$

Подставим (2.11) в (1.2). Перейдем для Φ к эквивалентной системе интегральных уравнений.

$$(I - G[q,k])\Phi = F,$$

где:

$$F = \frac{i}{2\pi}\int\int_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z-\zeta} \\ \frac{1}{\overline{z-\zeta}} & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{q}{2}\kappa_{21} & -\partial_{\bar{z}}\kappa_{12}\exp(k(z-\zeta)) \\ -\partial_z\kappa_{21}\exp\overline{(k(z-\zeta))} & \frac{-\bar{q}}{2}\kappa_{12} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что $F \in X'$. Далее, следуя доказательству теоремы 3, получим, что $\Phi \in X'$. Теорема 4 доказана.

2.1.3 Сопряженная матрица

Приведем интегральные уравнения, сопряженные относительно полуторалинейных форм (2.2) и (2.3), и покажем, что решением этих уравнений является одна и та же матриц-функция.

Обозначим через $\mathbf{G}^*[q,k]$ оператор, сопряженный $\mathbf{G}[q,k]$ относительно полуторалинейной формы (2.2):

$$(\mathbf{G}[q,k]\phi, \psi)_q = (\phi, \mathbf{G}^*[q,k]\psi)_q.$$

Приведем формальный вывод оператора $\mathbf{G}^*[q,k]$.

$$(\mathbf{G}[q,k]\phi_{(j)}, \psi_{(j)})_q = \frac{-i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} dz \wedge d\bar{z} \times$$

$$\times \Bigg[\overline{q(z)}\left(\int\int_{\mathbf{C}} d\xi \wedge d\bar{\xi}\ q(\xi)\frac{\exp(kz-k\xi)}{z-\xi}\phi_{2j}(\xi,k)\right)\overline{\psi_{1j}(z,k)} +$$

$$+q(z)\Bigg(\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\ \frac{-\overline{q(\xi)}\exp(kz-k\xi)}{\overline{z-\xi}}\phi_{1j}(\xi,k)\Bigg)\overline{\psi_{2j}(z,k)}\Bigg] =$$

$$=\frac{-i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\Bigg[\overline{q(\xi)}\phi_{1j}(\xi,k)\overline{\Bigg(\int\int_{\mathbf{C}} dz\wedge d\bar{z}\ \kappa\overline{q(z)}\frac{\exp(kz-k\xi)}{z-\xi}\psi_{2j}(z,k)\Bigg)}+$$

$$+q(\xi)\phi_{2j}(\xi,k)\ \overline{\Bigg(\int\int_{\mathbf{C}} dz\wedge d\bar{z}\ q(z)\frac{\exp(\overline{kz-k\xi})}{\overline{k-l}}\psi_{1j}(z,k)\Bigg)}\Bigg]$$

В результате получим выражение для сопряженного оператора $\mathbf{G}^*[q,k]$:

$$\mathbf{G}^*[q,k]\psi=\frac{i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\begin{pmatrix} 0 & \kappa\overline{q(\xi)}\frac{\exp(k\xi-kz)}{\xi-z} \\ q(\xi)\frac{\exp(\overline{k\xi-kz})}{\overline{\xi-z}} & 0\end{pmatrix}\psi(\xi,k).$$

Матрица ψ удовлетворяет уравнению:

$$\psi=\mathbf{G}^*[q,k]\psi+E(-kz). \tag{2.12}$$

Полностью повторив предыдущий пункт, можно доказать, что решение этой задачи существует при $\forall k\in\mathbb{C}$, и его асимптотика при $k\to\infty$ имеет ту же структуру, за исключением знака в экспоненте.

Для матрицы $\psi(z,k)$ можно так же, как и для матрицы ϕ получить формулы $\bar{D}$-задачи. Для этого формально продифференцируем по $\bar{k}$ первый столбец интегрального уравнения (2.12). В результате получим:

$$\partial_{\bar{k}}\psi_{11}\ -\ \frac{-1}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\ \kappa\overline{q(\xi)}\frac{\exp(k\xi-kz)}{\xi-z}\partial_{\bar{k}}\psi_{21}=0,$$

$$\partial_{\bar{k}}\psi_{21}-\frac{-i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\ q(\xi)\frac{\exp(\overline{k\xi-kz})}{\overline{\xi-z}}\partial_{\bar{k}}\psi_{11}-$$

$$-\frac{-i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}\ q(\xi)\exp(\overline{k\xi-kz})\psi_{11}(\xi,k).$$

Обозначим

$$\beta(k)=\frac{-i}{4\pi}\int\int_{\mathbf{C}} d\xi\wedge d\bar{\xi}q(\xi)\exp(\overline{k\xi})\psi_{11}(\xi,k).$$

Покажем, что $\beta(k)\equiv b(k)$. Для этого воспользуемся формулой для $\bar{b}(k)$:

$$4\pi i\bar{b}(k)=(\phi_{(1)},E_{(1)}(-kz))_q=(\phi_{(1)},\psi_{(1)})_q-(\phi_{(1)}\mathbf{G}^*\psi_{(1)})_q=$$

$$=(\phi_{(1)},\psi_{(1)})_q-(\mathbf{G}\phi_{(1)},\psi_{(1)})_q=(E_{(1)}(kz),\psi_{(1)})_q.$$

Тогда:

$$\bar{b}(k) = \bar{\beta}(k),$$

или

$$b(k) = \frac{-i}{4\pi} \int \int_{\mathbf{C}} dz \wedge d\bar{z}\; q(z) \exp(\overline{kz}) \psi_{11}(z,k).$$

Теперь можно заметить, что столбец $\partial_{\bar{k}} \psi_{(1)}$ удовлетворяет с тому же уравнению, что и столбец $\beta(k)\psi_{(2)}$. Следовательно:

$$\partial_{\bar{k}} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{pmatrix} = b(k) \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы написать уравнения $\bar{D}$-задачи для второго столбца матрицы ψ, можно воспользоваться свойством симметрии

$$\psi = \sigma^{-1} \overline{\psi} \sigma,$$

которое справедливо не только для матрицы ϕ (1.7), но и для решений сопряженной задачи. В результате получим систему уравнений $\bar{D}$-задачи для матрицы ψ:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{k}} \psi_{11} & \partial_k \psi_{12} \\ \partial_{\bar{k}} \psi_{21} & \partial_k \psi_{22} \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 0 & b(k) \\ -\bar{b}(k) & 0 \end{pmatrix}$$

Асимптотика решения при $k \to \infty$:

$$E(kz) \psi^T(z,k)|_{|k| \to \infty} = I.$$

Ниже нам потребуется решение задачи сопряженной к $\bar{D}$-задаче относительно полуторалинейной формы (2.3).

Интегральное уравнения для ϕ, эквивалентное задаче (1.10) имеет вид:

$$\phi = \mathbf{B}[b,z]\phi \,+\, E(kz), \tag{2.13}$$

где

$$\mathbf{B}[b,z]\phi = \frac{i}{2\pi} \int \int_{\mathbb{C}} dl \wedge d\bar{l}\, \phi(z,l) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(l) \exp(-\overline{lz+kz})}{k-l} \\ \frac{\overline{b(l)} \exp(-lz+kz)}{\overline{k-l}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{B}^*[b,z]$ оператор, формально сопряженный оператору $\mathbf{B}[b,z]$ относительно полуторалинейной формы $\langle \bullet, \bullet \rangle_b$. То есть, удовлетворяющий формуле:

$$\langle \mathbf{B}[b,z]\phi^{(j)}, \psi^{(j)} \rangle_b = \langle \phi^{(j)}, \mathbf{B}^*[b,z]\psi^{(j)} \rangle_b.$$

Вывод не отличается от вывода $\mathbf{G}^*[q,k]$, данного выше. Приведем явный вид оператора

$$\mathbf{B}^*[b,z]\psi = \frac{-i}{2\pi} \int\int_{\mathbf{C}} dl \wedge d\bar{l}\, \psi(z,l) \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\overline{b(l)}\exp(\overline{-kz+lz})}{\overline{-l+k}} \\ \frac{-b(l)\exp(-kz+lz)}{-l+k} & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этого оператора $\bar{D}$-задачу для ψ можно записать в виде:

$$\psi = \mathbf{B}^*[b,z]\psi \, + \, E(-kz). \tag{2.14}$$

2.1.4 Формула для вариации потенциала

Здесь приведена формула для вычисления вариации потенциала задачи рассеяния по вариации данных рассеяния. Она получена с помощью формальных вычислений. Ниже эта формула используется для построения базисной системы функций, связанных с задачей (1.2), (1.4).

Данные рассеяния для задачи (1.2), (1.4) в бессолитонном случае вычисляются как элемент матрицы из формулы (1.8):

$$b(k) = \frac{-i}{4\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dz \wedge dz\, q(z)\phi_{22}(z,k,t)\exp(-kz), \tag{2.15}$$

где ϕ_{ij} – элемент матрицы ϕ.

Пусть $\delta q(z)$ – инфинитизимальная вариация функции $q(z)$. Тогда, по крайней мере формально, вариацию данных рассеяния можно представить в виде:

$$\delta b(k) = \frac{-i}{4\pi}\big((\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_{\delta q} \, + \, (\delta\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_q \big).$$

Здесь $\delta\phi$ – решение уравнения:

$$\delta\phi = \mathbf{G}[q,k]\delta\phi + \mathbf{G}[\delta q, k]\phi.$$

В формуле для $\delta b(k)$ заменим $E_{(2)}(-kz)$ на $\psi_{(2)} - \mathbf{G}[q,k]\psi_{(2)}$ в результате:

$$(\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_{\delta q} + (\delta\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_q = (\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{\delta q} -$$
$$-(\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_{\delta q} + (\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q - (\delta\phi_{(2)}\mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_q. \qquad (2.16)$$

В форме $(\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q$ заменим $\delta\phi$ в соответствии с интегральным уравнением:

$$(\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q = (\mathbf{G}[\delta q,k]\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q + (\mathbf{G}[q,k]\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q.$$

Здесь удобно воспользоваться сопряженностью операторов $\mathbf{G}[q,k]$ и $\mathbf{G}^*[q,k]$:

$$(\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q = (\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_{\delta q} + (\delta\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_q.$$

Поставив это выражение в (2.16), получим:

$$(\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_{\delta q} + (\delta\phi_{(2)}, E_{(2)}(-kz))_q = (\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{\delta q} +$$
$$+(\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_{\delta q} + (\delta\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_q - (\phi_{(2)}, \mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_{\delta q} +$$
$$+(\delta\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_q - (\delta\phi_{(2)}\mathbf{G}^*[q,k]\psi_{(2)})_q$$

После сокращения подобных слагаемых, получается формула:

$$\delta b(k) = \frac{-i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{\delta q}. \qquad (2.17)$$

Следующий шаг в этом параграфе – формула для вычисления вариации потенциала по известной вариации данных рассеяния. Формула для вычисления $q(z)$ имеет вид [106], [93]:

$$q(z) = \frac{1}{i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} dk \wedge dk\, b(k,\bar{k})\phi_{11}(z,k)\exp(\overline{-kz}).. \qquad (2.18)$$

Приведем формальный вывод формулы (2.21). Пусть $\delta b(k)$ – инфинитизимальная вариация данных рассеяния. Из (2.18) следует, что формула для вариации потенциала имеет вид:

$$\delta q(z,\bar{z}) = \frac{-1}{i\pi}\big(\langle\phi^{(2)}, E^{(2)}(-kz)\rangle_{\delta b} + \langle\delta\phi^{(2)}, E^{(2)}(-kz)\rangle_b\big), \qquad (2.19)$$

здесь $E^{(2)}(-kz)$ – вторая строка матрицы $E(-kz)$.

Формула (2.19) содержит вариацию $\delta\phi$. Матрица $\delta\phi$ – решение интегрального уравнения:

$$\delta\phi \,-\, \mathbf{B}[b,k]\delta\phi \,-\, \mathbf{B}[\delta b,k]\phi = 0, \tag{2.20}$$

Для преобразования (2.19) к более удобному для вычислений виду можно проделать с ней те же манипуляции, что и с формулой для вариации данных рассеяния. При этом надо использовать свойства полуторалинейной формы $\langle\bullet,\bullet\rangle_b$ и интегральное уравнение $\bar{D}$-задачи для матрицы ψ. В результате получим формулу для вариации потенциала:

$$\delta q(z) = \frac{1}{i\pi}\,\langle\phi^{(2)},\psi^{(2)}\rangle_{\delta b}, \tag{2.21}$$

Замечание 6. *Формула для вариационной производной $\frac{\delta b}{\delta q}$ использовалась в [54, 140] при вычислении скобок Пуассона данных рассеяния.*

2.1.5 Интегральное преобразование типа Фурье

Здесь приведено интегральное преобразование для интегрируемых функций двух вещественных переменных, удовлетворяющих условию Дини по каждой из этих переменных. Специальный характер эволюции подынтегральных функций по времени позволяет решить лДС-2 методом Фурье.

Выше получена формулы для вычисления вариации данных рассеяния по вариации потенциала и наоборот – вариации потенциала по вариации данных рассеяния:

$$\delta b = \frac{-i}{4\pi}(\phi_{(2)},\psi_{(2)})_{\delta q}, \quad \delta q(z) = \frac{1}{i\pi}\,\langle\phi^{(2)},\psi^{(2)}\rangle_{\delta b}.$$

Это формальные выражения, однако, глядя на них, естественно предположить, что они являются прямым и обратным преобразованиями для функций двух вещественных переменных. Воспользуемся этими формулами, чтобы устроить отображение из подходящего пространства функций двух вещественных переменных в пространство коэффициентов разложения и обратно.

Теорема 5. *Пусть решение задачи (1.2), (1.4) существует при $\forall k \in \mathbb{C}$ и имеет асимптотику (2.9), тогда преобразование $f \mapsto \hat{f}$:*

$$\hat{f} = \frac{-i}{4\pi}(\phi_{(2)},\psi_{(2)})_f$$

обратимо для функций $f(z)$ интегрируемых по x и y в $\mathbb{R}^2$, где $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ и удовлетворяющих условию Дини по переменным x и y. Обратное преобразование $\hat{f} \mapsto f$ производится по формуле:

$$f = \frac{-1}{i\pi} \langle \phi^{(2)}, \psi^{(2)} \rangle_{\hat{f}}.$$

Доказательство. Прямое и затем обратное преобразования дают:

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} \left(\bar{\hat{f}} \overline{\phi_{21}}(z,k) \psi_{21}(z,k) - \hat{f} \overline{\phi_{22}}(z,k) \psi_{22}(z,k) \right) = \\ = \frac{1}{i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} \, \{ \frac{-i}{4\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' \big(f(z') \overline{\phi_{12}(z',k)} \psi_{21}(z',k) + \\ + \overline{f(z') \phi_{22}(z',k)} \psi_{22}(z',k) \big) \overline{\phi_{21}}(z,k) \psi_{21}(z,k) \big) - \\ - \frac{-i}{4\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' \big(\overline{f(z')} \phi_{12}(z',k) \overline{\psi_{12}}(z',k) + \\ + f(z') \psi_{22}(z',k) \overline{\psi_{22}}(z',k) \big) \overline{\phi_{22}}(z,k) \psi_{22}(z,k) \big) \}, \end{aligned}$$

Интегралы по z', $\bar{z}'$ сходятся из-за интегрируемости f; двойной интеграл по k, $\bar{k}$ представим как несобственный интеграл по кругу C_R радиуса R при $R \to \infty$. Поменяем порядок интегрирования по z', $\bar{z}'$ и по k, $\bar{k}$. Заменим в подынтегральных выражениях комплексные сопряжения элементов матриц ϕ и ψ по формулам: $\bar{\phi}_{11} = \phi_{22}$, $\bar{\phi}_{21} = -\phi_{12}$, $\bar{\psi}_{11} = \psi_{22}$, $\bar{\psi}_{21} = -\psi_{12}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} h = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{R\to\infty} \int\int_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' \big[\overline{f(z')} \int\int_{C_R} dk \wedge d\bar{k} \, \times \\ \times \big(-\phi_{11}(z',k)\psi_{22}(z',k)\phi_{12}(z,k)\psi_{21}(z,k) + \\ + \phi_{12}(z',k)\psi_{21}(z',k)\phi_{11}(z,k)\psi_{22}(z,k) \big) + \\ + f(z') \int\int_{C_R} dk \wedge d\bar{k} \big(\phi_{21}(z',k)\phi_{12}(z',k)\phi_{12}(z,k)\psi_{21}(z,k) - \\ - \phi_{22}(z',k)\psi_{11}(z',k)\phi_{11}(z,k)\psi_{22}(z,k) \big) \big] \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\omega_1(z,z',k) = \phi_{22}(z',k)\psi_{22}(z,k)\, dk \; - \; \phi_{21}(z',k)\psi_{21}(z,k)\, d\bar{k},$$

$$\omega_2(z,z',k) = \phi_{11}(z,k)\psi_{11}(z',k)\, d\bar{k} \; - \; \phi_{12}(z,k)\psi_{12}(z',k)\, dk,$$

$$\omega_3(z,z',k) = -\phi_{11}(z',k)\psi_{21}(z,k)\, d\bar{k} \; + \; \phi_{12}(z',k)\psi_{22}(z,k)\, dk,$$

$$\omega_4(z,z',k) = -\phi_{12}(z,k)\psi_{22}(z',k)\,dk\,+\,\phi_{11}(z,k)\psi_{21}(z',k)\,d\bar{k}.$$

Используя эти обозначения, интегралы по C_R в последней формуле для h можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
I_1 = \int\int_{C_R} dk\wedge d\bar{k}\big(&\phi_{21}(z',k)\psi_{12}(z',k)\phi_{12}(z,k)\psi_{21}(z,k) - \\
&-\phi_{22}(z',k)\psi_{11}(z',k)\phi_{11}(z,k)\psi_{22}(z,k)\big) = \\
&= \int\int_{C_R} \omega_1(z,z',k)\wedge\omega_2(z,z',k);\\
I_2 = \int\int_{C_R} dk\wedge d\bar{k}\big(&\phi_{12}(z',k)\psi_{21}(z',k)\phi_{11}(z,k)\psi_{21}(z,k) - \\
&-\phi_{11}(z',k)\phi_{22}(z',k)\phi_{12}(z,k)\psi_{21}(z,k)\big) = \\
&= \int\int_{C_R} \omega_4(z,z',k)\wedge\omega_3(z,z',k).
\end{aligned}$$

Заметим, что 1-формы ω_j, $j = 1,\ldots,4$ замкнуты, следовательно для вычисления интегралов $I_{1,2}$ можно применить формулу Стокса.

Обозначим через $\Omega_j(z,z',k)$ первообразную 1-формы $\omega_1(z,z',k)$, то есть $d\Omega_j(z,z',k) = \omega_1(z,z',k)$. Ниже понадобится асимптотика $d\Omega_j$ при $|k|\to\infty$. Для построения этой асимптотики приведем асимптотики элементов матрицы ψ при $|k|\to\infty$:

$$\psi_{11}(z,k) = (1 - \frac{1}{4k}\partial_{\bar{z}}^{-1}|q|^2\,+\,O(|k|^{-2}))\exp(-kz),$$

$$\psi_{12}(z,k) = (\frac{1}{2\bar{k}}\,q\,+\,O(|k|^{-2}))\exp(-\overline{kz}).$$

Здесь

$$\partial_{\bar{z}}^{-1}|q|^2 = \int\int_{\mathbb{C}} dw\wedge d\bar{w}\frac{|q(w,\bar{w})|^2}{z-w}.$$

Можно показать(так же, как в теореме об асимптотике матриц-функции ϕ), что условий на функцию q, сформулированных в теореме 1, достаточно для обоснования приведенных здесь асимптотик по k компонент матрицы ψ.

Пользуясь асимптотиками ϕ и ψ, можно показать, что:

$$\int\int_{C_R} d\Omega_1(z,z',k)\wedge d\Omega_2(z,z',k) =$$

$$= \frac{\exp(k(z'-z)+\overline{k(z-z')})}{(z'-z)\overline{(z-z')}}\big(1+O(R^{-1})\big);$$

$$\int\int_{C_R} d\Omega_4(z,z',k)\wedge d\Omega_3(z,z',k) = O(R^{-1}).$$

После подстановки этих формул в интеграл для h получим:

$$h = \frac{-1}{4\pi^2}\lim_{R\to\infty}\int\int_{\mathbb{C}} dz'\wedge d\bar{z}' f(z')\frac{\exp(k(z'-z)+\overline{k(z-z')})}{(z'-z)\overline{(z-z')}}.$$

Функция f интегрируема и удовлетворяет условию Дини по обеим переменным. Тогда из определения прямого и обратного преобразования Фурье получим:

$$h(z) = f(z).$$

Теорема 5 доказана.

2.1.6 Эволюция коэффициентов разложения

Здесь определена эволюция функции $\hat{U}$, когда U и v удовлетворяют системе уравнений (2.1). Функцию $\hat{U}(k,t)$ при $k\in\mathbb{C}$ будем называть коэффициентом Фурье.

Теорема 6. *Пусть в задаче (1.2), (1.4) функция q – одна из компонент решения системы уравнений ДС-2 – удовлетворяет условиям теоремы 1, если функция U– одна из компонент решения начально-краевой задачи (2.7) для системы уравнений лДС-2 (2.1), тогда коэффициент Фурье – $\hat{U}(k,t)$ удовлетворяет уравнению:*

$$\partial_t\hat{U} - 2i(k^2+\bar{k}^2)\hat{U} = \hat{F}. \tag{2.22}$$

Доказательство теоремы . Матрица ϕ удовлетворяет системе уравнений эволюции по t [106], [93]:

$$\partial_t\phi = \begin{pmatrix} 2i(\partial_z^2-k^2)+ig & i\partial_{\bar{z}}q - iq\partial_{\bar{z}} \\ i\partial_z\bar{q} - i\bar{q}\partial_z & -2i(\partial_{\bar{z}}^2-\bar{k}^2)-i\bar{g}\end{pmatrix}\phi. \tag{2.23}$$

Похожему уравнению удовлетворяет и матрица ψ:

$$\partial_t\psi = \begin{pmatrix} -2i(\partial_z^2-k^2)+ig & -i\partial_{\bar{z}}\bar{q} + i\bar{q}\partial_{\bar{z}} \\ i\partial_z q - iq\partial_z & 2i(\partial_{\bar{z}}^2-\bar{k}^2)+i\bar{g}\end{pmatrix}\psi. \tag{2.24}$$

Продифференцируем по t коэффициент Фурье $\hat{U}$:

$$\partial_t \hat{U} = (\partial_t \phi_{(2)}, \psi_{(2)})_U + (\phi_{(2)}, \partial_t \psi_{(2)})_U + (\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{\partial_t U}. \tag{2.25}$$

Производную $\partial_t \phi_{(2)}$ заменим в силу системы (2.23), производную $\partial_t \psi_{(2)}$ – в силу системы (2.24), производную $\partial_t U$ – в силу системы уравнений (2.1). В результате в правой части формулы (2.25) не содержится выражений от производных по t. Однако, останутся производные по пространственным переменным от функций ψ, ϕ, u, $\bar{u}$, g и $\bar{g}$. Оставшиеся интегралы нужно взять несколько раз по частям так, чтобы производные по пространственным переменным от функций ϕ и ψ перекинуть на производные по пространственным переменным функций u, $\bar{u}$, g и $\bar{g}$. Далее, после довольно громоздких преобразований интегралов по z и $\bar{z}$ в правой части (2.25) формула (2.25) приводится к виду (2.22).

Теорема 2 является следствием теорем 5 и 6.

2-2 Структурная неустойчивость двумерного алгебраического солитона

В этом разделе с помощью теории возмущений исследована задача об устойчивости алгебраического солитонного решения по отношению к малому возмущению начального условия. Солитонному решению соответствуют данные рассеяния с постоянными k_0, μ_0, ν_0 в дискретной части.

При возмущении солитонного начального условия результат оказывается неожиданным – солитонная структура данных рассеяния разрушается при малом возмущении [10]. Этот результат можно объяснить, прибегнув к задаче на собственные значения интегрального оператора:

$$(I - G^*[k, q])B = \lambda B. \tag{2.26}$$

В терминах задачи на собственные значения солитонная структура соответствует существованию нулевого кратного собственного значения. Подробное исследование задачи рассеяния показало, что кратное собственное значение при возмущении потенциала q распадается на простые ненулевые собственные значения в окрестности $k = k_0$. Ненулевые собственные значения оператора (2.26) не приводят к солитонам в решении. Это означает, что двумерный солитон уравнения ДС-2 структурно неустойчив при возмущении начального условия.

Технически сформулированное утверждение получено при дополнительном предположении, что нулевое собственное значение интегрального оператора $(I - G^*[q_0, k])$ являемся двойным полупростым.

Предположение 1. *Оператор* $(I - G^*[q_0, k])$ *с солитонным потенциалом* $q_0(z)$ *имеет только две линейно независимые вектор-функции* $B^{(1)}(z)$ *и* $B^{(2)}(z)$*, такие, что:*

$$E(kz)B^{(j)}(z)|_{|z|\to\infty} = 0.$$

Вообще говоря, интегральный оператор может быть представлен в виде суммы конечномерного и сжимающего в пространстве непрерывных вектор-функций X'. Исходя из этого, можно предполагать существование конечного числа линейно независимых функций с нулевым собственным значением. К сожалению, ни доказать, ни опровергнуть Предположение 1 не удалось.

2.2.1 Компактность интегрального оператора

Солитонный потенциал не удовлетворяет условию (2.4), которое обеспечивает сжимаемость интегрального оператора в пространстве функций X' из п.2.1.2. Интегральный оператор $G[q, k]$ для солитонного потенциала компактен в пространстве функций X'. Этим свойством мы и будем пользоваться для исследования возмущенной задачи. Для удобства вместо оператора $G[q, k]$, который действует в пространстве функций с экспоненциальным весом, перейдем к оператору $\mathcal{G}[h, k]$:

$$\mathcal{G}[h, k] = E(-kz)G[\hat{h}, k], \qquad \hat{h}(\zeta, k) = h(\zeta)\exp\{\overline{k\zeta}\}.$$

Можно показать, что, если q непрерывная функция и $|q| \sim |z|^{-2}$ при $|z| \to \infty$, то $\mathcal{G}[q, k]$ – компактный оператор в пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ непрерывных вектор-функций с нормой

$$||u|| = \sup_{z\in\mathbb{C}} \left((1 + |z|)\left(|u_1(z)| + |u_2(z)|\right)\right),$$

где u_j – компоненты u.

Лемма 3. *Оператор* $\mathcal{G}[q,k]$, *с непрерывным потенциалом* q, *убывающим как* $|z|^{-2}$ *при* $|z| \to \infty$, *является компактным в* $\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $p_M(z)$ – гладкая срезающая функция такая, что $p_M(z) = 0$ при $|z| \geq 2M$ и $p_M(z) = 1$ при $|z| \leq M$, $M = \text{const} > 0$. Представим $\mathcal{G}$ в виде

$$\mathcal{G} = (1 - p_M)\mathcal{G} + p_M \mathcal{G} p_M + p_M \mathcal{G}(1 - p_M)$$

и оценим вначале оператор $(1 - p_M)\mathcal{G}$:

$$\begin{gathered} ||(1 - p_M)\mathcal{G}\phi|| = \\ = \sup_{|z|\geq M} (1 + |z|) \left(\left| \tfrac{i}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\, \tfrac{q(\zeta)\exp(\overline{k\zeta} - k\zeta)\,\phi_2(\zeta)}{z-\zeta} \right| + \right. \\ \left. + \left| \tfrac{i}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\, \tfrac{\overline{q}(\zeta)\exp(k\zeta - \overline{k\zeta})}{\overline{z-\zeta}}\, \phi_1(\zeta) \right| \right) \leq \\ \leq \tfrac{1}{2\pi} ||\phi|| \sup_{|z|\geq M} (1 + |z|) \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx' dy'\, \tfrac{C}{|z-\zeta|(1+|\zeta|)(1+|\zeta|^2)}. \end{gathered}$$

Здесь $\zeta = x' + iy'$, ϕ_j – компоненты ϕ, функция $q(\zeta)$ оценена как $C(1 + |\zeta|^2)^{-1}$, а функции $\phi_j(\zeta)$ оценены через норму: $||\phi(\zeta,k)||(1 + |\zeta|)^{-1}$. Заменив в интеграле ζ на ζ/z, получаем, что $||(1 - p_M)\mathcal{G}|| \to 0$ при $M \to \infty$.

Аналогично получается оценка для оператора $p_M\mathcal{G}(1 - p_M)$:

$$\begin{gathered} ||p_M \mathcal{G}(1 - p_M)\phi|| \leq \\ \leq C||\phi|| \sup_{|z|\leq 2M} \int\limits_{|\zeta|\geq M} \frac{dx'dy'}{|z-\zeta|(1+|\zeta|)(1+|\zeta|^2)} \leq C_M||\phi||, \end{gathered} \tag{2.27}$$

где $C_M \to 0$ при $M \to \infty$.

Оставшийся интегральный оператор $p_M\mathcal{G}p_M$ действует из $\mathcal{C}$ в пространство финитных функций. Ядро $\mathcal{K}$ этого оператора равно нулю вне множества $D = \{|\zeta| \leq 2M, |z| \leq 2M\}$. Внутри этого множества его можно с любой степенью точности аппроксимировать вырожденными ядрами [9]:

$$\mathcal{K} = \mathcal{P} + \mathcal{Q},$$

где $\mathcal{P}$ – вырожденное непрерывное ядро, а $\mathcal{Q}$ – полярное ядро со сколь угодно малой нормой. Тогда оператор $\mathcal{G}$ можно представить в виде:

$$\mathcal{G} = K + Q,$$

где K – оператор с вырожденным ядром, а Q – оператор со сколь угодно малой нормой. Следовательно, $\mathcal{G}$ является компактным оператором в $\mathcal{C}$.

2.2.2 Задача о нулевом собственном значении

Из альтернативы Фредгольма следует, что уравнение (1.5) неразрешимо при некотором $k = k_0$, если выполнены условия:

1) существует нетривиальное однородное решение краевой задачи

$$(I - G^*[q, k_0])B = 0, \qquad E(zk_0)B|_{|z|\to\infty} = 0, \tag{2.28}$$

где $G^*[q,k]$ – формально сопряженный к $G[q,k]$ оператор относительно полуторалинейной формы (2.2);

2) существует пара чисел (l, m) такая, что $(E_{(l)}(kz), B_{(m)})_q \neq 0$, где $l = 1, 2$, $m = 1, 2, \ldots, N$, N – число линейно независимых решений $B_{(m)}$ интегрального уравнения (2.28).

Оба этих условия выполнены для солитонного потенциала

$$q_0(z) = \frac{2\bar{\nu}\exp(k_0 z - \overline{k_0 z})}{|z + \mu_0|^2 + |\nu_0|^2}.$$

Однородное интегральное уравнение (2.28) имеет два линейно независимых решения $B_{(1)}(z)$ и $B_{(2)}(z)$, таких что

$$(E_{(1)}(k_0 z), B_{(1)})_{q_0} = 0, \quad (E_{(1)}(k_0 z), B_{(2)})_{q_0} = 4i\pi,$$

$$(E_{(2)}(k_0 z), B_{(1)})_{q_0} = 4i\pi, \quad (E_{(2)}(k_0 z), B_{(2)})_{q_0} = 0.$$

Эти решения имеют вид:

$$B_{(1)}(z) = \frac{1}{|z+\mu|^2 + |\nu|^2}\begin{pmatrix} -\overline{(z+\mu)}\exp(-zk_0) \\ -\bar{\nu}\exp(-\overline{zk_0}) \end{pmatrix};$$

$$B_{(2)}(z) = \frac{1}{|z+\mu|^2 + |\nu|^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa}\nu\exp(-zk_0) \\ -(z+\mu)\exp(-\overline{zk_0}) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с Предположением 1 будем считать, что алгебраическая кратность нулевого собственного значения при $k = k_0$ равна двум.

Легко видеть, что краевая задача (2.28) может быть сведена к задаче о построении нетривиального, убывающего на бесконечности решения уравнения

$$(I - \mathcal{G}^*[q, k_0])\chi = 0. \tag{2.29}$$

Два линейно независимых решения этого уравнения легко получить из столбцов $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$:

$$\mathcal{B}_{(j)} = E(k_0 z)B_{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Удобно новому оператору $\mathcal{G}^*[q, k]$ поставить в соответствие полуторалинейную форму с весовой функцией, домноженной на осциллирующую экспоненту:

$$(\bullet, \bullet)_{\tilde{q}}, \quad \text{где} \;\; \tilde{q}(z, k) = \exp(-kz + \overline{kz})q(z)$$

Необходимым условием существования солитона уравнения ДС-2 является существование нулевого собственного значения $\lambda(k) = 0$ уравнения

$$(I - \mathcal{G}^*[q, k])\mathcal{B} = \lambda(k)\mathcal{B}. \tag{2.30}$$

2.2.3 Равномерная асимптотика собственного значения

В этом пункте показано, что для потенциала $q(z) = q_0(z) + q_1(z)$, где $q_1(z)$ – гладкая финитная функция, формальная асимптотика собственного значения оператора (2.26) при $\varepsilon \to 0$ по $\mathrm{mod}(o(\varepsilon))$ в окрестности $k = k_0$ имеет вид:

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon, k) = \varepsilon \overset{1}{\lambda}_j \left(\frac{k - k_0}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, 2,$$

$$\overset{1}{\lambda}_1 \overset{1}{\lambda}_2 = \frac{|4i\pi\bar{\varkappa} + Q_2|^2 + |Q_1|^2}{|\nu|^2}.$$

Здесь

$$Q_j = (A_{(1)}, B_{(j)})_{q_1}, \;\; k = k_0.$$

Если $Q_1 \neq 0$, то $\overset{1}{\lambda}_1 \overset{1}{\lambda}_2 \neq 0$ для $\varepsilon > 0$ и k, достаточно близкого k_0. Заметим, что из-за произвола в выборе функции q_1, ее можно подобрать так, чтобы Q_1 было отличным от нуля. Таким образом, формальные асимптотические построения показывают, что собственные значения возмущенной задачи не равны нулю (в случае общего положения). Следовательно, решение (1.2) при возмущенном потенциале не имеет особенностей при k, близких к k_0. Обоснование построенных здесь асимптотик собственных значений приводится в следующем разделе.

Перейдем к формальным построениям. Рассмотрим возмущеный потенциал:

$$q(z) = q_0(z) + \varepsilon q_1(z), \tag{2.31}$$

где q_1 – гладкая финитная функция и $0 < \varepsilon \ll 1$. Главные члены асимптотик собственного значения и собственной функции уравнения (2.30) в возмущенном случае строятся в следующем виде:

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon, k) = \varepsilon \overset{1}{\lambda}(\varkappa), \tag{2.32}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(z, k, \varepsilon) = \overset{0}{\mathcal{B}}(z, \varkappa) + \varepsilon \overset{1}{\mathcal{B}}(z, \varkappa), \tag{2.33}$$

где $\varkappa = (k - k_0)\varepsilon^{-1}$. Подставляя (2.31)–(2.33) в (2.30) и учитывая формальное асимптотическое по ε разложение оператора $\mathcal{G}^*[q_0 + \varepsilon q_1, k]$ в окрестности точки k_0, получаем следующие уравнения:

$$(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0]) \overset{0}{\mathcal{B}} = 0, \tag{2.34}$$

$$(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0]) \overset{1}{\mathcal{B}} = \overset{1}{F}, \tag{2.35}$$

где

$$\overset{1}{F} = \mathcal{G}^*[q_1, k_0] \overset{0}{\mathcal{B}} + \varkappa \partial_k \mathcal{G}^*[q_0, k_0] \overset{0}{\mathcal{B}} + \bar{\varkappa} \partial_{\bar{k}} \mathcal{G}^*[q_0, k_0] \overset{0}{\mathcal{B}} + \overset{1}{\lambda}(\varkappa) \overset{0}{\mathcal{B}}. \tag{2.36}$$

Очевидно, функция

$$\overset{0}{\mathcal{B}}(z, \varkappa) = \alpha_1(\varkappa)\mathcal{B}_{(1)}(z) + \alpha_2(\varkappa)\mathcal{B}_{(2)}(z) \tag{2.37}$$

удовлетворяет уравнению (2.34) при любых α_1 и α_2.

Для сопряженного к $(I + \mathcal{G}^*[q_0, k_0])$ относительно полуторалинейной формы $(\bullet, \bullet)_{\tilde{q}_0}$ оператора $(I + \mathcal{G}[q_0, k_0])$ интегральный оператор имеет вид

$$\mathcal{G}[h, k] = E(-kz)G[\tilde{h}, k], \qquad \tilde{h}(\zeta, k) = \overline{h(\zeta)} \exp\{2k\zeta - \overline{k\zeta}\},$$

Первый и второй столбцы матрицы $E(-k_0 z)A(z)$ – $\mathcal{A}_{(1)}$ и $\mathcal{A}_{(2)}$ – решения однородного уравнения:

$$(I + \mathcal{G}[q_0, k_0])\mathcal{A} = 0.$$

В силу альтернативы Фредгольма условие разрешимости для уравнения (2.35) принимает следующий вид:

$$(\mathcal{A}_{(j)}, \overset{1}{F})_{\tilde{q}_0} = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{2.38}$$

Столбцы $\mathcal{B}_{(1)}$ и $\mathcal{A}_{(1)}$ нормированы так, что:

$$(\mathcal{A}_{(1)}, I_{(1)})_{\tilde{q}_0} = 0, \quad (\mathcal{A}_{(1)}, I_{(2)})_{\tilde{q}_0} = 4i\pi,$$

где $I_{(1)}$, $I_{(2)}$ столбцы единичной матрицы. Кроме того, при $k = k_0$:

$$(\mathcal{A}_{(1)}, \mathcal{B}_{(1)})_{\tilde{q}_0} = -2\nu, \quad (\mathcal{A}_{(2)}, \mathcal{B}_{(2)})_{\tilde{q}_0} = -2\bar{\nu},$$

$$(\mathcal{A}_{(1)}, \mathcal{B}_{(2)})_{\tilde{q}_0} = (\mathcal{A}_{(2)}, \mathcal{B}_{(1)})_{\tilde{q}_0} = 0.$$

Подставив (2.36) в (2.38) и учитывая нормировку $\mathcal{A}_{(1)}$ и $\mathcal{B}_{(1)}$, получим систему линейных уравнений на α_1 и α_2:

$$\begin{aligned} 4i\pi\nu \overset{1}{\lambda} \alpha_1 + \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + 4i\pi\alpha_2\bar{\varkappa} = 0,\\ -4i\pi\bar{\nu} \overset{1}{\lambda} \alpha_2 + \alpha_1\bar{Q}_2 - \alpha_2\bar{Q}_1 - 4i\pi\alpha_1\varkappa = 0, \end{aligned} \tag{2.39}$$

где

$$Q_j = (\mathcal{A}_{(1)}, \mathcal{B}_{(j)})_{\tilde{q}_1}, \ \ k = k_0.$$

Условие разрешимости (2.39) приводит к квадратному уравнению на $\overset{1}{\lambda}$:

$$|\nu|^2 \overset{1}{\lambda}{}^2 + 2\mathrm{Re}\big(\overline{\nu}Q_1\big) \overset{1}{\lambda} + |4i\pi\bar{\varkappa} + Q_2|^2 + |Q_1|^2 = 0. \tag{2.40}$$

В силу теоремы Виета для решений $\overset{1}{\lambda}_i$ уравнения (2.40) справедливо равенство, приведенное в начале этого раздела:

$$\overset{1}{\lambda}_1 (\varkappa) \overset{1}{\lambda}_2 (\varkappa) = \tfrac{|4i\pi\bar{\varkappa} + Q_2|^2 + |Q_1|^2}{|\nu|^2}. \tag{2.41}$$

2.2.4 Обоснование асимптотик собственных значений

Здесь будет показано, что полученные в предыдущем пункте асимптотические формулы для собственных значений возмущенной задачи справедливы.

Результаты этого пункта были опубликованы в совместной работе с Р.Р. Гадыльшиным [11]. Они принадлежат Р.Р. Гадыльшину. В диссертации этот пункт приведен для полноты изложения исследования о возмущении собственных значений.

Большая часть рассуждений в этом параграфе не зависит от индекса i в обозначении $\overset{1}{\lambda}_i$. Поэтому там, где это не приводит к разночтениям, индекс будет опускаться. Кроме этого, в силу произвола в выборе q_1 будем считать это возмущение таким, что (2.40) имеет два различных решения $\overset{1}{\lambda}_1(\varkappa) \neq \overset{1}{\lambda}_2(\varkappa)$.

Нормируем (2.37) следующим равенством:

$$\alpha_1 + |\alpha_2| = 1, \qquad \alpha_1 \geq 0. \tag{2.42}$$

Из (2.40) следует, что

$$|\overset{1}{\lambda}| = O(1 + |\varkappa|). \tag{2.43}$$

Из (2.36), (2.37), (2.42) и (2.43) вытекает оценка

$$||\overset{1}{F}|| = O(1 + |\varkappa|). \tag{2.44}$$

Так как решение уравнения (2.35) определяется с точностью до линейной комбинации $\mathcal{B}_{(j)}$, то нормируем $\overset{1}{\mathcal{B}}$ следующим условием:

$$(\mathcal{A}_{(j)}, \overset{1}{\mathcal{B}})_{\tilde{q}_0} = 0, \qquad k = k_0, \ \ j = 1, 2.$$

Покажем, что при такой нормировке из оценки (2.44) следует, что

$$||\overset{1}{\mathcal{B}}|| = O(1 + |\varkappa|). \tag{2.45}$$

Для этого достаточно показать, что, если $u \in \mathcal{C}$ и $(\mathcal{A}_{(j)}, u)_{\tilde{q}_0} = 0$, то

$$||u|| \leq C||(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0])u||. \tag{2.46}$$

Допустим противное, т.е. существует последовательность функций u_n таких, что $(A_{(j)}, u_n)_{q_0} = 0$ и $||u_n|| > n||(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0])u_n||$. Не ограничивая общности, будем считать, что $||u_n|| = 1$. Тогда из последнего неравенства следует, что $||(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0])u_n|| \to 0$. В силу компактности оператора $\mathcal{G}$ из этой сходимости вытекает существование подпоследовательности, для которой имеет место сходимость $u_n \to u_* \neq 0$, причем $(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0])u_* = 0$. С другой стороны, из этой сходимости вытекает нормировка $(\mathcal{A}_{(j)}, u_*)_{\tilde{q}_0} = 0$, что, легко видеть, противоречит предположению о двукратности нулевого собственного значения оператора $(I - \mathcal{G}^*[q_0, k_0])$. Из этого противоречия следует оценка (2.46), а следовательно, – и оценка (2.45).

Обозначим $T(\varepsilon, k) = I - \mathcal{G}^*[q_0 + \varepsilon q_1, k] - \tilde{\lambda}(\varepsilon, k)$. Очевидно, собственные значения $\mu(\varepsilon, k)$ оператора $T(\varepsilon, k)$ и собственные значения $\lambda(\varepsilon, k)$ оператора $I - \mathcal{G}^*[q, k]$ связаны соотношением

$$\lambda(\varepsilon, k) = \tilde{\lambda}(\varepsilon, k) + \mu(\varepsilon, k). \tag{2.47}$$

Из (2.32)–(2.37), (2.42), (2.43) и (2.45) следует, что

$$T(\varepsilon, k)\tilde{\mathcal{B}} = o(\varepsilon + |k - k_0|), \qquad ||\tilde{\mathcal{B}}|| \geq C > 0. \tag{2.48}$$

Пусть γ – окружность на комплексной плоскости достаточно малого радиуса с центром в нуле, такая что в ограничиваемом ею круге лежит только нулевое собственное значение оператора $T(0, k_0)$. Обозначим

$$\begin{aligned} P(\varepsilon, k) &= -\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (T(\varepsilon, k) - \zeta)^{-1}\, d\zeta, \\ U(\varepsilon, k) &= \left(1 - (P(\varepsilon, k) - P(0, k_0))^2\right)^{-1/2} \times \\ &\quad \times (1 - P(\varepsilon, k) - P(0, k_0))\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Известно [120], что проектор $P(\varepsilon, k)$ и трансформирующая функция $U(\varepsilon, k)$ позволяют свести задачу на собственные значения для оператора $T(\varepsilon, k)$ к задаче на собственные значения для двумерного оператора

$$\hat{T}(\varepsilon, k) = P(0, k_0)U^{-1}(\varepsilon, k)T(\varepsilon, k)U(\varepsilon, k)P(0, k_0),$$

определенного в $P(0, k_0)\mathcal{C}$. Причем, оба собственных значения $\hat{T}$ и оба собственных значения T (при $\varepsilon \to 0$ и $k \to k_0$) совпадают. Из определения

$\hat{T}$ и (2.48) следует, что для $\hat{T}$ и $\hat{\mathcal{B}}(\varepsilon,k) = U^{-1}(\varepsilon,k)\tilde{\mathcal{B}}(\varepsilon,k)$ справедливы следующие соотношения

$$\hat{T}(\varepsilon,k) = \varepsilon\hat{T}_1(\varepsilon,k) + (k-k_0)\hat{T}_2(\varepsilon,k), \qquad ||\hat{T}_j|| \leq C, \tag{2.50}$$

$$\hat{T}(\varepsilon,k)\hat{\mathcal{B}} = o(\varepsilon + |k-k_0|), \qquad ||\hat{\mathcal{B}}|| \geq C > 0. \tag{2.51}$$

В свою очередь, из (2.51) вытекает, что для 2×2-матрицы $B(\varepsilon,k) = (\varepsilon+|k-k_0|)^{-1}\hat{T}(\varepsilon,k)$ имеют место следующие соотношения:

$$B\hat{\mathcal{B}} = o(1), \qquad ||\mathcal{B}|| \leq C, \qquad ||\hat{\mathcal{B}}|| \geq C > 0, \tag{2.52}$$

а ее собственные значения $\nu(\varepsilon,k)$ связаны с собственными значениями $\mu(\varepsilon,k)$ матрицы $\hat{T}(\varepsilon,k)$ равенством

$$\mu(\varepsilon,k) = (\varepsilon + |k-k_0|)\nu(\varepsilon,k). \tag{2.53}$$

Из (2.52) следует, что существует стремящееся к нулю $\nu(\varepsilon,k)$ и, следовательно, в силу (2.47) и (2.53) существует собственное значение

$$\lambda(\varepsilon,k) = \tilde{\lambda}(\varepsilon,k) + o(\varepsilon + |k-k_0|). \tag{2.54}$$

Здесь мы заметим, что на самом деле построены две асимптотики, соответствующие индексу $i = 1,2$. Поэтому ниже будем вновь добавлять этот индекс в полученных формулах.

Обозначим через λ_i, $i = 1,2$ собственные значения оператора $(I - \mathcal{G}[q^0,k])$ стремящиеся к нулю при $k \to k_0$ и $\varepsilon \to 0$. Так как $\tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2$, то $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и из (2.32), (2.41) и (2.54) следует, что

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{|4i\pi(\overline{k-k_0}) + \varepsilon Q_2|^2 + \varepsilon^2|Q_1|^2}{|\nu|^2} + \\ + o(\varepsilon^2 + \varepsilon|k-k_0| + |k-k_0|^2). \tag{2.55}$$

Из (2.55) следует, что, если $Q_1 \neq 0$, то $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ для $\varepsilon > 0$ и любого k, близкого k_0.

Таким образом, структура данных рассеяния (в терминах метода обратной задачи рассеяния [93]) неустойчива по отношению к малым возмущениям начальных данных.

2-3 Асимптотика солитоноподобного пакета

В этом разделе показано, что, несмотря на бессолитонную структуру данных рассеяния возмущенной задачи для уравнений ДС-2, ее решение сохраняет солитоно-подобную форму главного члена асимптотики вплоть до времен порядка ε^{-1}. Здесь вычислена модуляция параметров этого солитоно-подобного решения.

Формулы этого раздела носят формально-асимптотический характер и существенно опираются на предположение о двукратности и полупростоте нулевого собственного значения оператора $(I + G^*[q_0, k])$ в точке k_0.

2.3.1 Постановка задачи и формулировка результатов

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений ДС-2 (1.1) при $\kappa = -1$ с краевым условием для функции $g \to 0$ при $|z| \to \infty$ и с возмущенным начальным условием:

$$q^{\varepsilon}(z,0) = q_{\varepsilon}(z) = q_0(z) + \varepsilon q_1(z), \tag{2.56}$$

где q_1 – гладкая функция с конечным носителем, и ε – малый положительный параметр. Ниже с помощью теории возмущений показано, что решение уравнений (1.1) вплоть до $t = O(\varepsilon^{-1})$ имеет формальную асимптотику при $\varepsilon \to 0$:

$$q^{\varepsilon}(z,t) \sim \frac{2\overline{\nu_0}\exp(k_0 z - \overline{k_0 z} + 2i(k_3^2 + \overline{k}_0^2)t)}{|z + 4itk_0 + \mu_0 + \varepsilon t\mu_1|^2 + |\nu_0|^2}, \tag{2.57}$$

$$g^{\varepsilon}(z,t) \sim \frac{-4\overline{(z + 4itk_0 + +\mu_0 + \varepsilon t\mu_1)}^2}{(|z + 4itk_0 + \mu_0 + \varepsilon t\mu_1|^2 + |\nu_0|^2)^2}, \tag{2.58}$$

где

$$\mu_1 = -\frac{2i}{\pi}\int dz \wedge d\bar{z} \frac{z + \mu_0}{(|z + \mu_0|^2 + |\nu_0|^2)^2} \Im(q_1 \nu_0 \exp\{\overline{zk_0} - zk_0\}). \tag{2.59}$$

2.3.2 Асимптотика данных рассеяния

Как показано в разделе 2.2, при возмущении солитонного потенциала пропадает нулевое собственное значение вспомогательной линейной задачи, а следовательно и дискретная часть данных рассеяния. Вместо дискретной возникает непрерывная часть данных рассеяния.

Здесь построена формальная асимптотика непрерывной части данных рассеяния, соответствующих начально- краевой задаче для уравнений ДС-2 с начальным условием (2.56). Эта асимптотика имеет составной характер:

$$b_\varepsilon(k) \sim \varepsilon b_1(k) \quad \text{при } |k-k_0| > \varepsilon^{1/2}, \tag{2.60}$$

$$b_\varepsilon(k) \sim \varepsilon^{-1} b_{-1}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right) + b_0\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right) \text{ при } |k-k_0| < 2\varepsilon^{1/2}, \tag{2.61}$$

$$b_{-1}(\varkappa) = -\frac{\overline{Q_1}}{|Q_1|^2 + |Q_2+\varkappa|^2}, \tag{2.62}$$

$$b_1(k) = -\frac{i}{4\pi}(\overset{0}{\phi}_{(1)}, \overset{0}{\psi}_{(1)})_{q_1}. \tag{2.63}$$

Здесь и далее,

$$Q_j = \frac{1}{4\pi i}(A_{(1)}, B_{(j)})_{q_1}, \tag{2.64}$$

а через $\overset{0}{\phi}_{(1)}$ обозначен первый столбец матрицы ϕ, соответствующей солитонному потенциалу (1.19), вектор $\overset{0}{\psi}_{(1)}$ определен формулой:

$$\overset{0}{\psi}_{(1)}(z,k) = E_{(1)}(-kz) + \frac{\exp\{(-k+k_0)z\}}{k-k_0} B_{(1)}(z), \tag{2.65}$$

Для построения асимптотики данных рассеяния необходима формальная асимптотика функции ϕ – решения задачи (1.2), (1.4) для возмущенного потенциала $q(z,0) = q_\varepsilon(z)$. Сформулируем результат этого построения. Формальная асимптотика решения задачи (1.2), (1.4) для возмущенного потенциала:

по $\mathrm{mod}(o(\varepsilon))$ при $|k-k_0| > \varepsilon^{1/2}$ имеет вид:

$$\phi(z,\varepsilon) = \overset{0}{\phi}(z) + \varepsilon \overset{1}{\phi}(z),$$

где $\overset{0}{\phi}(z)$– решение задачи (1.2), (1.4) с солитонным потенциалом;

по $\mathrm{mod}(o(1))$ при $|k-k_0|<2\varepsilon^{1/2}$:

$$\phi_\varepsilon(k,z)=E(kz)\left(\varepsilon^{-1}\overset{-1}{\Phi}(\varkappa,z)+\overset{0}{\Phi}(\varkappa,z)\right),$$

где

$$\overset{-1}{\Phi}(\varkappa,z)=E(-k_5z)A(z)\alpha(\varkappa),$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(\varkappa)\ &=-\tfrac{(\overline{O_2+\varkappa})}{|Q_1|^2+|Q_2+\varkappa|^4},\\ \alpha_2(\varkappa)\ &=-\tfrac{Q_1}{|Q_1|^2+|Q_2+\varkappa|^2}.\end{aligned}$$

Построим асимптотику решения $\phi=\phi_\varepsilon$ задачи рассеяния (1.2), (1.4) для возмущенного потенциала $q(z,0)=q_\varepsilon(z)$. Из асимптотики ϕ_ε и формулы для непрерывной части данных рассеяния (1.8) будет следовать (2.60)–(2.62).

Так как асимптотика q_ε имеет вид (2.56), естественно строить асимптотику ϕ_ε в таком же виде

$$\phi_\varepsilon(z)=\overset{0}{\phi}(z)+\varepsilon\overset{1}{\phi}(z)+\dots. \qquad (2.66)$$

Используя формулу Коши-Грина, запишем граничную задачу (1.2), (1.4) в форме интегрального уравнения

$$(I-G[q_\varepsilon,k])\phi_\varepsilon=E(kz). \qquad (2.67)$$

Подставляя (2.66) и (2.56) в (2.67) и выписывая равенства при одинаковых степенях ε, получаем уравнение для $\overset{0}{\phi}$ и $\overset{1}{\phi}$:

$$(I-G[q_0,k])\overset{0}{\phi}=E(kz), \qquad (2.68)$$

$$(I-G[q_0,k])\overset{1}{\phi}=G[q_1,k]\overset{0}{\phi}, \qquad (2.69)$$

Решение уравнения (2.68) имеет вид (1.19). Это решение для солитонного потенциала, полученное в [93].

Для исследования разрешимости уравнения (2.69) воспользуемся матричным решением однородного уравнения, определенного в (1.18). Из определений полуторалинейных форм получим

$$(A[q,k]w,v)_h=(w,G[\bar h,k]v)_q \qquad (2.70)$$

и, в частности,

$$(G[h,k]w,v)_h = (w, G[\bar{h},k]v)_h.$$

Условия разрешимости уравнения

$$(I - G[q_0,k_0])W = F,$$

имеют вид:

$$(F, B_{(i)})_{q_0} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2.71}$$

Решение уравнения (2.69) имеет особенность более чем первого порядка, если выполнено одно из неравенств:

$$\left(\lim_{k\to k_0}\left((k-k_0)G[q_1,k]\overset{0}{\phi}_{(1)}\right), B_{(i)}\right)_{q_0} \neq 0, \qquad i = 1, 2.$$

Эти условия эквивалентны неравенствам:

$$(A_{(1)}, B_{(i)})_{q_1} \neq 0, \qquad i = 1, 2$$

или по определению (2.64): $Q_i \neq 0$.

Постоянные Q_i определяются возмущением q_1. Рассмотрим функцию q_1 такую, что $Q_1 \neq 0$. В этом случае возмущение q_1 будем называть невырожденным возмущением. Для невырожденного возмущения порядок особенности в поправочных членах асимптотики (2.66) нарастает. Это приводит к тому, что асимптотика пригодная при $|k - k_0| > C\varepsilon^{\gamma}$ (для любого $C > 0$ и $0 \leq \gamma < 1$, и, в частности, для $C = 1$ и $\gamma = 1/2$), становится непригодной в малой окрестности $k = k_0$. Поэтому для k близких к k_0, мы строим асимптотическое разложение в другой форме, используя метод согласования асимптотических разложений [29].

При $k \to k_0$ матриц-функция $\overset{0}{\phi}$ может быть записана в виде

$$\overset{0}{\phi}(z) = E(kz)\left(\varepsilon^{-1}\overset{-1}{V}(\varkappa, z) + \overset{0}{V}(\varkappa, z) + \dots\right), \tag{2.72}$$

где

$$\overset{-1}{V}_{(1)}(\varkappa, z) = -\tfrac{1}{\varkappa}\exp\{-k_0 z\}A_{(1)}, \tag{2.73}$$

$$\overset{0}{V}_{(1)}(\varkappa, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(z^{-1}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2.74}$$

Вторые столбцы матриц $\overset{-1}{V}$ и $\overset{0}{V}$ восстанавливаются благодаря свойству симметрии $V = \sigma^{-1}\overline{V}$.

Далее, следуя методу согласования асимптотических разложений и принимая во внимание (2.72)–(2.74), при $|k-k_0| < 2\varepsilon^{1/2}$ асимптотическое решение задачи (1.2), (1.4) будем искать в виде

$$\phi_\varepsilon(k,z) = E(kz)\left(\varepsilon^{-1} \overset{-1}{\Phi} (\varkappa, z) + \overset{0}{\Phi} (\varkappa, z) + \ldots\right), \tag{2.75}$$

где

$$\overset{-1}{\Phi}_{(1)} (\varkappa, z) \sim -\frac{1}{\varkappa} \exp\{-k_0 z\}\mathcal{A}_{(1)}, \qquad \varkappa \to \infty, \tag{2.76}$$

$$\overset{0}{\Phi}_{(1)} (\varkappa, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(z^{-1}\right), \qquad z \to \infty, \quad \varkappa \to \infty. \tag{2.77}$$

Обозначим

$$\mathcal{G}[h,k] = E(-kz)G[\hat{h},k], \qquad \hat{h}(\zeta,k) = h(\zeta)\exp\{\overline{k\zeta}\}. \tag{2.78}$$

Подставляя (2.75) в (2.67) и учитывая краевые условия (2.76) и (2.77), получаем следующие уравнения:

$$(I - \mathcal{G}[q_0,k_0]) \overset{-1}{\Phi} = 0, \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}(I - \mathcal{G}[q_0,k_0]) \overset{0}{\Phi} = \quad & I + \mathcal{G}[q_1,k_0] \overset{-1}{\Phi} + \varkappa\partial_k\mathcal{G}[q_0,k_0] \overset{-1}{\Phi} + \\ & + \overline{\varkappa}\partial_{\overline{k}}\mathcal{G}[q_0,k_0] \overset{-1}{\Phi},\end{aligned} \tag{2.80}$$

Принимая во внимание (2.78), легко показать, что функция

$$\overset{-1}{\Phi} (\varkappa, z) = E(-k_0 z)\mathcal{A}(z)\alpha(\varkappa), \tag{2.81}$$

где $\mathcal{A}$ – матрица со столбцами $\mathcal{A}_{(j)}$, $j = 1,2$, является решением однородного уравнения (2.79) для любого вектора $\alpha(\varkappa)$.

С другой стороны, из (2.71) и (2.78) следует, что условия разрешимости для уравнения

$$(I - \mathcal{G}[q_0,k_0])\mathcal{W} = \mathcal{F}$$

имеют вид

$$(E(k_0 z)\mathcal{F}, B_{(i)})_{q_0} = 0, \qquad i = 1,2. \tag{2.82}$$

Вектор α определяется из условия разрешимости (2.82) для (2.80). Заметим, что из определений $\mathcal{G}[h,k]$ и $G[h,k]$ следует, что

$$\varkappa\partial_k\mathcal{G}[h,k_0]+\overline{\varkappa}\partial_{\overline{k}}\mathcal{G}[h,k_0]=\mathcal{G}[\tilde{h},k_0],\ \text{ где }\ \tilde{h}(\zeta,\varkappa)=h(\zeta)(\overline{\zeta\varkappa}-\zeta\varkappa). \quad (2.83)$$

Подставляя правую часть (2.80) в (2.82) и используя (2.81), (2.83) и (2.78), (2.70), получаем для компонент α следующие равенства:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\varkappa) &= -\tfrac{(\overline{O_2+\varkappa})}{|Q_1|^2+|Q_2+\varkappa|^4},\\ \alpha_2(\varkappa) &= -\tfrac{Q_1}{|Q_1|^2+|Q_2+\varkappa|^2}.\end{aligned} \quad (2.84)$$

В результате, функция Φ_{-1}, определенная в (2.81) и (2.84), удовлетворяет условиям согласования (2.76) и не имеет сингулярностей по $\varkappa$.

Таким образом, для невырожденного возмущения ($Q_1 \neq 0$), асимптотическое решение (1.2), (1.4) имеет вид (2.66) при $|k-k_2|>\varepsilon^{1/2}$ и имеет вид (2.75), (2.81), (2.84) при $|k-k_0|<2\varepsilon^{1/2}$.

Далее, подставляя асимптотику (2.66), (2.75) и (2.56) в (2.15) и учитывая, что

$$b_0(k)=-\frac{i}{4\pi}\int dz\wedge d\overline{z}\,q_0(z)\,\overline{\overset{0}{\phi}_{11}\,(z)}\,\exp\{-kz\}=0,$$

получаем, что b_ε имеет структуру (2.60), (2.61), где

$$b_1(k)=\frac{-i}{4\pi}\int dz\wedge d\overline{z}\left(q_0(z)\overline{\overset{1}{\phi}_{11}}(z)+q_1(z)\overline{\overset{0}{\phi}_{11}\,(z)}\right)\exp(-kz), \quad (2.85)$$

$$b_{-1}(\varkappa)\sim-\frac{i}{4\pi}\int dz\wedge d\overline{z}\,q_0\,\overline{\overset{-1}{\Phi}_{11}}\exp(\overline{kz}-kz). \quad (2.86)$$

Подставляя (2.81) и (2.84) в (2.86), получаем равенство (2.62). Учитывая (2.69), легко показать, что

$$(\overset{0}{\phi}_{(1)},\overset{0}{\psi}_{(1)})_{q_1}=(\overset{1}{\phi}_{(1)},E_{(1)}(-kz))_{q_0}+(\overset{0}{\phi}_{(1)},E_{(1)}(-kz))_{q_1}. \quad (2.87)$$

Из (2.85), (2.87) следует (2.63). Таким образом, построена формальная асимптотика данных рассеяния.

2.3.3 Асимптотика решения обратной задачи

Здесь построена составная формальная асимптотика решения краевой задачи для функции ϕ, равномерная при $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Эта формальная асимптотика носит составной характер, который диктуется составным же видом асимптотики данных рассеяния $b_\varepsilon(k)$. Области комплексного параметра k, в которых построены части составной асимптотики, определяются неравенствами: $|k - k_0| > \varepsilon^{1/2}$ и $|k - k_0| < 2\varepsilon^{1/2}$. В области пересечения асимптотики матриц-функции ϕ согласованы.

При $|k - k_0| > \varepsilon^{1/2}$ формальная асимптотика имеет вид:

$$\varphi^\varepsilon(z,t,k) = \overset{0}{\varphi}(z,t,k) + \varepsilon \overset{1}{\varphi}(z,t,k).$$

При $|k - k_0| \leq 2\varepsilon^{1/2}$:

$$\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \overset{-1}{\chi} + \overset{0}{\chi},$$

Перейдем к построению асимптотики ϕ. Из результатов предыдущих разделов следует, что решение начально-краевой задачи для (1.1) сводится к исследованию возмущенной $\bar{D}$-задачи при $b(k) \equiv b_\varepsilon(k)$.

Обозначим матрицу ϕ^T – решение задачи (1.10) – через $\varphi = \varphi^\varepsilon$. При $b(k) = b_\varepsilon(k)$ и $|k - k_0| > \varepsilon^{1/2}$, асимптотическое решение задачи (1.10) будем строить в виде:

$$\varphi^\varepsilon(z,t,k) = \overset{0}{\varphi}(z,t,k) + \varepsilon \overset{1}{\varphi}(z,t,k) + \dots \tag{2.88}$$

Для простоты в этом разделе часто вместо того, чтобы писать уравнения для матриц, мы будем использовать только уравнения для первых столбцов. Вторые столбцы определяются из свойства симметрии:

$$\overset{j}{\varphi}_{(2)} = \sigma\overline{\overset{j}{\varphi}_{(1)}}.$$

Подставив (2.88) и (2.60) в (1.10), получаем задачу для $\overset{0}{\varphi}_{(1)}$:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\overline{k}} & 0 \\ 0 & \partial_k \end{pmatrix} \overset{0}{\varphi}_{(1)} = 0, \qquad \overset{0}{\varphi}_{(1)} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \to \infty. \tag{2.89}$$

Очевидно, что функция

$$\overset{0}{\varphi}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^{(1)}}{k-k_0} \\ \frac{\overline{\beta^{(2)}}}{\overline{k-k_2}} \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

удовлетворяет (2.89) для любых $\beta^{(m)}$, независимых от k.

При $|k-k_0| < 2\varepsilon^{1/2}$ функция b_ε имеет вид (2.61). Поэтому естественно в (1.10) перейти к растянутой переменной $\varkappa = (k-k_0)\varepsilon^{-1}$. В этой области асимптотику φ^ε будем строить методом согласования асимптотических разложений. Следуя этому методу, перепишем асимптотики(2.88), (2.90) при $k \to k_0$ во внутренней переменной $\varkappa$, в результате получим:

$$(\varphi^\varepsilon)_{(1)} = \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\beta^{(1)}}{\varkappa} \\ \frac{\beta^{(2)}}{\overline{\varkappa}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots .$$

Последнее равенство приводит к тому, что при $|k - k_0| < 2\varepsilon^{1/2}$ (или $|\varkappa| < 2\varepsilon^{-1/2}$) асимптотика φ^ε имеет следующую структуру

$$\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \overset{-1}{\chi} + \overset{0}{\chi} + \dots , \qquad (2.91)$$

где коэффициенты удовлетворяют граничным условиям:

$$\overset{-1}{\chi}_{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^{(1)}}{\varkappa} \\ \frac{\beta^{(2)}}{\overline{\varkappa}} \end{pmatrix} (1 + o(1)) \qquad \text{при } \varkappa \to \infty, \qquad (2.92)$$

$$\overset{0}{\chi}_{(1)} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{при } \varkappa \to \infty, \qquad (2.93)$$

Обозначим $s_0 = s(z, t, k_0)$, $l = 4ik_0t + z$, $T = \varepsilon 2t$. В этих переменных получаем, что

$$s(z, t, k) = s_0 - \varepsilon\, i(l\varkappa - \overline{l\varkappa}) + \varepsilon T(\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2). \qquad (2.94)$$

Подставляя (2.91) и (2.61) в (1.10) и принимая во внимание (2.94), получаем уравнения для $\overset{j}{\chi}$:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\overline{\varkappa}} & 0 \\ 0 & \partial_\varkappa \end{pmatrix} \overset{-1}{\chi} = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{\Omega_0} \\ \Omega_0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\chi}, \qquad (2.95)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{\overline{\varkappa}} & 0 \\ 0 & \partial_\varkappa \end{pmatrix} \overset{0}{\chi} = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{\Omega_0} \\ \Omega_0 & 0 \end{pmatrix} \overset{0}{\chi} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -(\overline{\Omega_1 + Z}) \\ \Omega_1 + Z & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\chi}, \qquad (2.96)$$

где

$$\Omega_0(\varkappa, s_0) = -\frac{\overline{Q_1}\exp\{is_0\}}{|Q_1|^2 + |Q_2+\varkappa|^2}, \qquad \Omega_1(\varkappa, s_0) = b_0(\varkappa)\exp\{is_0\},$$
$$Z(\varkappa, l, s_0, T) = \Omega_0(\varkappa, s_0)\left((\varkappa l - \overline{\varkappa l}) + iT(\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2)\right).$$

Замечание 7. *При выводе этих уравнений отброшены члены вида:*

$$\left[\varepsilon^2\left(O(T^2) + O((\varkappa l - \overline{\varkappa l}) + iT(\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2))^2\right)\right].$$

Поэтому эти уравнения можно рассматривать вплоть до $T = 2\varepsilon t < Const$ *и не слишком далеко от центра уединенной волны:* $|l| \ll \varepsilon^{-1}$.

Уравнение (2.95) имеет два линейно независимых решения, убывающих при $\varkappa \to \infty$:

$$\mathcal{X}_{(1)} = \frac{1}{|\varkappa + Q_2|^2 + |Q_1|^2}\begin{pmatrix} \overline{Q_2 + \varkappa} \\ \overline{Q_1}\exp\{is_0\} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{X}_{(2)} = \sigma\overline{\mathcal{X}_{(1)}}.$$

Следовательно, решение (2.95), (2.92) имеет вид:

$$\overset{-1}{\chi} = \mathcal{X}\beta, \tag{2.97}$$

здесь $\mathcal{X}$ – матрица со столбцами $\mathcal{X}_{(j)}$ и β – вектор с компонентами β_m.

Для вычисления β рассмотрим задачу (2.96), (2.93) для χ_0. Используя формулу Коши-Грина, перепишем граничную задачу (2.96), (2.93) в виде интегрального уравнения:

$$(I - \mathcal{H}[\Omega_0])\overset{0}{\chi} = F, \tag{2.98}$$

где I – единичная матрица,

$$\left(\mathcal{H}[h]s\right)(\varkappa) = -\frac{i}{2\pi}\int dm \wedge d\overline{m}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{h}(m)}{m-\varkappa} \\ \frac{h(m)}{\overline{m-\varkappa}} & 0 \end{pmatrix} w(m),$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{H}[(\Omega_1 + Z)]\overset{-1}{\chi}. \tag{2.99}$$

Воспользовавшись обозначениями для полуторалинейных форм, легко видеть, что

$$\langle \mathcal{H}[g]w, v\rangle_{\bar{h}} = \langle w, \mathcal{H}[\bar{h}]v\rangle_{\bar{g}} \tag{2.100}$$

и, в частности,

$$\langle \mathcal{H}[h]w, v\rangle_{\bar{h}} = \langle w, \mathcal{H}[\bar{h}]v\rangle_{\bar{h}}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{Y}_{(1)} = \frac{1}{|\varkappa + Q_2|^2 + |Q_1|^2}\begin{pmatrix} \overline{Q_2 + \varkappa} \\ Q_1 \exp\{-is_0\} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}_{(2)} = \sigma\overline{\mathcal{Y}_{(1)}}$$

– убывающие решения сопряженного уравнения

$$(I - \mathcal{H}[\overline{\Omega_0}])\mathcal{Y}_{(j)} = 0, \tag{2.101}$$

и условия разрешимости (2.98) имеют вид:

$$\langle F, \mathcal{Y}_{(i)}\rangle_{\overline{\Omega_0}} = 0, \quad i = 1,\, 2. \tag{2.102}$$

Подставив (2.99) в (2.102) и используя (2.100), (2.101), получаем, что условия разрешимости сводятся к равенствам

$$\int d\varkappa \wedge d\bar{\varkappa}\left(\overline{\Omega_0}\mathcal{Y}^1_{(m)}\right) + \sum_{j=1}^{2} \beta_j \left(\langle \mathcal{X}_{(j)}, \mathcal{Y}_{(m)}\rangle_{\overline{\Omega_1}} + \langle \mathcal{X}_{(j)}, \mathcal{Y}_{(m)}\rangle_{\overline{Z}}\right) = 0, \tag{2.103}$$

где $m = 1, 2$, $\mathcal{Y}^1_{(m)}$ – первая компонента вектора $\mathcal{Y}_{(m)}$. Прямые вычисления показывают, что

$$\langle \mathcal{X}_{(j)}, \mathcal{Y}_{(j)}\rangle_{\overline{Z}} = 0, \qquad \langle \mathcal{X}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(2)}\rangle_{\overline{Z}} = \overline{\langle \mathcal{X}_{(2)}, \mathcal{Y}_{(1)}\rangle_{\overline{Z}}} = -2\pi(2TQ_2 + il),$$
$$\int d\varkappa \wedge d\bar{\varkappa}\left(\overline{\Omega_0}\mathcal{Y}^1_{(1)}\right) = 0, \quad \int d\varkappa \wedge d\bar{\varkappa}\left(\overline{\Omega_0}\mathcal{Y}^{(2)}_1\right) = -2\pi i, \tag{2.104}$$

$$\langle \mathcal{X}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(1)}\rangle_{\overline{\Omega_1}} = -\overline{\langle \mathcal{X}_{(2)}, \mathcal{Y}_{(2)}\rangle_{\overline{\Omega_1}}} = a_1 \exp(is_0),$$
$$\langle \mathcal{X}_{(2)}, \mathcal{Y}_{(1)}\rangle_{\overline{\Omega_1}} = \overline{\langle \mathcal{X}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(2)}\rangle_{\overline{\Omega_1}}} = a_2,$$

где a_j некоторые постоянные. Подставив (2.104) в (2.102), получаем систему уравнений для определения компонент вектора β:

$$a_1 \exp(is_0)\beta_1 + \left(a_2 - 2\pi\left(2T\bar{Q}_2 - il\right)\right)\beta_2 = 0,$$
$$\left(\bar{a}_2 - 2\pi\left(2TQ_2 + il\right)\right)\beta_1 - \bar{a}_1 \exp(-is_0)\beta_2 = 2i\pi,$$

разрешая которую, находим

$$\begin{aligned} \beta_1(l,T,s_0) &= \tfrac{2\pi i\left(a_2-2\pi\left(2T\bar{Q}_2-il\right)\right)}{|a_1|^2+|a_2-2\pi\left(2T\bar{Q}_2-il\right)|^2}, \\ \beta_2(l,T,s_0) &= -\tfrac{2i\pi a_1\exp\{is_0\}}{|a_1|^2+|a_2-2\pi\left(2T\bar{Q}_2-il\right)|^2}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Таким образом, асимптотическое решение системы (1.10) имеет вид (2.88), (2.90), при $|k-k_0|>\varepsilon^{1/2}$, и имеет вид (2.91), (2.97), (2.105) при $|k-k_0|<2\varepsilon^{1/2}$.

2.3.4 Асимптотика солитоноподобного решения уравнения ДС-2

Как упоминалось выше, в бессолитонном случае решение уравнения ДС-2 может быть получено по формуле (1.12). Подставив асимптотику (2.60), (2.61) данных рассеяния и асимптотическое представление (2.88), (2.91) для φ^ε в (1.12), получаем, что

$$q^\varepsilon \sim I^{ex}+I^{in} \qquad \text{при } \varepsilon\to 0, \tag{2.106}$$

где

$$I^{ex}=\varepsilon\tfrac{i}{\pi}\int\limits_{|k-k_0|>\varepsilon^{1/2}} dk\wedge d\bar{k}\ \overset{0}{\varphi}_{(1)}(k)b_0(k), \tag{2.107}$$

$$I^{in}=\varepsilon^{-2}\tfrac{i}{\pi}\int\limits_{|k-k_0|<\varepsilon^{1/2}} dk\wedge d\bar{k}\ \overset{-1}{\chi}_{(1)}(\varkappa)b_{-1}(\varkappa). \tag{2.108}$$

Здесь $\overset{0}{\varphi}_{(1)}$ и $\overset{-1}{\chi}_{(1)}$ – первые компоненты векторов $\overset{0}{\varphi}$ и $\overset{-1}{\chi}$, соответственно. Подставляя (2.60) и (2.90) в (2.107) и используя (2.65), находим, что

$$I^{ex}=O(\varepsilon^{1/2}). \tag{2.109}$$

Подставив (2.62) и (2.97) в (2.108) и перейдя в (2.108) к переменной $\varkappa$, получаем, что

$$I^{in}\sim -2\beta_2. \tag{2.110}$$

Теперь, подставляя (2.109), (2.110) и (2.105) в (2.106), находим, что

$$q^\varepsilon(z,t)\sim \frac{4i\pi a_1\exp(is_0)}{\left(|a_1|^2+|a_2-2\pi\left(2T\overline{Q_2}-il\right)|^2\right)}. \tag{2.111}$$

Принимая во внимание, что

$$q^{\varepsilon}(z,0) \sim q_0(z),$$

из (2.111) получаем, что

$$a_1 = -i2\pi\overline{\nu_0}, \qquad a_2 = i2\pi\mu_0 \tag{2.112}$$

Наконец, подставив (2.112) в (2.111), получим формулу (2.57). Эта формула и равенство (1.13) приводят к (2.57)–(2.59).

Глава 3

Временные асимптотики решений $\bar{D}$-задачи

В этом разделе приведены асимптотики по времени убывающих решений уравнений ДС-2, Ишимори-1 и КП-2. Построение решений этих уравнений основано на решении обратной задачи рассеяния (1.10), которая сводится к краевой задаче:

$$\begin{array}{c} \partial_{\bar{k}} A = -\bar{b}\exp(-itS)B, \\ \partial_k B = b\exp(itS)A, \end{array} \qquad \left.\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right|_{|k|\to\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Данные рассеяния не имеют солитонной (дискретной) составляющей и считаются заданной гладкой интегрируемой функцией.

Для построения асимптотики решения уравнений Ишимори используется асимптотика решения задачи (3.1) и формула (1.21).

Краевые задачи для уравнений ДС-2 и КП-2 отличаются во-первых, видом фазовой функции S. В случае уравнения ДС-2 функция S имеет только простую стационарную точку, а соответствующая уравнению КП-2 имеет вырожденную стационарную точку. Во-вторых, – тем, что связанная с КП-2 $\bar{D}$-задача для класса гладких и достаточно быстро убывающих по (x, y) начальных условий связана с разрывной на мнимой оси функцией $b(k)$. Поэтому, несмотря на общий характер асимптотических построений, решение уравнения КП-2 устроено существенно сложнее, как с технической, так и с идейной стороны.

3-1 Асимптотика бессолитонного решения ДС-2

Здесь строится асимптотика по времени бессолитонного решения системы уравнений ДС-2. Качественная картина асимптотического по t решения при $t \to \infty$ проста – решение быстро осциллирует, амплитуда осцилляций убывает как t^{-1}. Асимптотика решения уравнения ДС-2 получена в работе автора [42].

Сформулируем утверждение об асимптотике решения уравнений ДС-2:

Теорема 7. *Пусть данные рассеяния задачи состоят из функции $b(k)$ такой, что она сама и все ее производные по k и $\bar{k}$ до второго порядка – гладкие интегрируемые в $\mathbb{R}^2$, функция $kb(k)$ интегрируема в $\mathbb{R}^2$ и $b(k)$ удовлетворяет требованию:*

$$\frac{1}{\pi}\max_{\zeta\in\mathbb{C}}\int\int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu\,\frac{|b(\lambda+i\mu)|}{|\lambda+i\mu-\zeta|} < 1, \tag{3.2}$$

тогда асимптотика при $t \to \infty$ решения ДС-2 имеет вид:

$$q(z,t) = t^{-1}\,\frac{1}{2}\,b\Big(\frac{iz}{4t}\Big)\,\exp\left(\frac{it}{8}(\xi^2+\bar{\xi}^2)\right) + O(t^{-5/4}), \tag{3.3}$$

$$g = -t^{-2}\,V.P.\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dv\wedge d\bar{v}\,|b\big(\frac{iv}{4t}\big)|^2}{2i\pi(v-z)^2} + O(t^{-9/4}), \tag{3.4}$$

где $\xi = z/t$, равномерно по $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 8. *Если функция $b(k)$ не удовлетворяет условию (3.2), тогда удается построить формальное асимптотическое при $t \to \infty$ решение (1.1):*

$$\begin{aligned}\tilde{q}(z,t) &= t^{-1}\,\tfrac{1}{2}\,b\big(\tfrac{iz}{4t}\big)\,\exp\big(\tfrac{it}{8}(\xi^2+\bar{\xi}^2)\big)\,,\\ \tilde{g}(z,t) &= -t^{-2}\,V.P.\int\int_{\mathbb{C}}\tfrac{dv\wedge d\bar{v}\,|b\left(\frac{iv}{4t}\right)|^2}{(v-z)^2}.\end{aligned}$$

Функции $\tilde{q}$ и $\tilde{g}$ удовлетворяют первому уравнению в (1.1) с точностью $O(t^{-3/2})$, второму – с точностью $O(t^{-5/2})$.

3.1.1 Асимптотическое решение $\bar{D}$-задачи

В этом разделе построено асимптотическое решение задачи (1.10) при больших значениях t методом согласования асимптотических разложений [29].

В решении системы (1.10) удобно выделить осциллирующие экспоненты. Для этого примем обозначения:

$$\begin{aligned} \phi_{11}(k,z,t) &= A(k,z,t)\exp(kz), \\ \phi_{12}(k,z,t) &= B(k,z,t)\exp(\overline{kz}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Перепишем задачу (1.10) для функций A и B. В результате получим систему уравнений (3.1) с фазовой функцией специального вида: $S = 2(k^2+\bar{k}^2) - i(kz - \overline{kz})/t$.

Структура формального асимптотического решения задачи (3.1) определяется фазой S осциллирующей экспоненты. Асимптотическое по t при $t \to \infty$ решение (3.1) имеет составной характер. Вне некоторой окрестности стационарной точки фазы S формальное асимптотическое решение строится по целым обратным степеням t (внешнее разложение).

В малой при $t \to \infty$ окрестности стационарной точки построено так называемое внутреннее разложение. Здесь в качестве калибровочной последовательности используется $t^{n/2}, \quad n = 1,2,\ldots.$

Существует некоторая область в окрестности стационарной точки, где пригодны оба асимптотических разложения, как внутреннее, так и внешнее. Это общий факт в методе согласования асимптотических разложений [29]. Здесь он используется для однозначного определения коэффициентов разложения.

В этом разделе доказано утверждение:

Теорема 8. *Пусть $b(k)$ – гладкая по k, $\bar{k}$ и такая, что $b(k)$ и все ее производные по k и $\bar{k}$ до второго порядка гладкие интегрируемые в $\mathbb{R}^2$ функции. Тогда формальное асимптотическое по $mod(o(t^{-1}))$ решение задачи (3.1) при $t \to \infty$ имеет составной характер. При $|k - \frac{i\xi}{4}| \geq Ct^{-1/2+\gamma}$, для $\forall\gamma > 0$, где $\xi = z/t$:*

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^{-1} \begin{pmatrix} \overset{1}{A} \\ \overset{1}{B} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где $\overset{1}{B}=\overset{1}{B}_0(\bar{k},\xi)+\overset{1}{B}_1(k,\xi)\exp(itS)$, *поправки* $\overset{1}{A}$, $\overset{1}{B}_0$ *и* $\overset{1}{B}_1$ *определены в (3.14), (3.13), (3.25).*

При $|k-\frac{i\xi}{4}|\le Ct^{-\delta}$ *для* $\forall\delta>0$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ \overset{1}{\beta}(l,\xi)\exp(itS) \end{pmatrix} + $$
$$+t^{-1}\begin{pmatrix} \overset{2}{\alpha}(l,\xi) \\ \overset{2}{\beta}(l,\xi)\exp(itS) \end{pmatrix},$$

где $l=\sqrt{t}\,(k-\frac{i\xi}{4})$, *поправки* $\overset{n}{\alpha}$, $\overset{n}{\beta}$, $\quad n=1,2$ *определены в (3.23), (3.24) и (3.27).*

Доказательство теоремы 8 состоит из двух частей – построения, так называемого внешнего формального асимптотического по t при $t\to\infty$ решения (3.5) в области вне малой при $t\to\infty$ окрестности точки $k=i\xi/4$ и построения внутреннего разложения (3.1) в окрестности точки $k=i\xi/4$.

Решение задачи (3.1) будем искать в виде:

$$A(k,\xi,t)=1\,+\,t^{-1}\,\overset{1}{A}(k,\xi)\,+\,t^{-2}\,\overset{2}{A}(k,\xi)\exp(-itS)\,+\,\dots, \tag{3.7}$$
$$B(k,\xi,t)=t^{-1}\,\overset{1}{B}\,+t^{-2}\,\overset{2}{B}(k,\xi)\exp(itS)\,+\,\dots\,. \tag{3.8}$$

Здесь многоточием обозначены члены меньших порядков по t.

Подставим (3.7), (3.8) в (3.1), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t^{-1}. В результате получим:

$$i\partial_k S\,\overset{1}{B}_1=b(k),\quad \overset{1}{B}_1|_{|k|\to\infty}=0; \tag{3.9}$$
$$-i\,\overset{2}{A}\exp(-itS)\partial_{\bar{k}}S\,+\,\partial_{\bar{k}}\,\overset{1}{A}=-\bar{b}\,\overset{1}{B}_1\,-\bar{b}\,\overset{1}{B}_0\exp(-itS), \tag{3.10}$$
$$\overset{1}{A}|_{|k|\to\infty}=0; \tag{3.11}$$
$$i\partial_k S\,\overset{2}{B}+\partial_k\,\overset{1}{B}_1=b(k)\,\overset{1}{A},\quad \overset{2}{B}|_{|k|\to\infty}=0. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.9) разрешимо, когда $\partial_k S\neq 0$. Из представления S легко видеть, что $\partial_k S=0$ при $k=i\xi/4$. Тогда, с точностью до убывающего при $|k| \to \infty$ решения однородного уравнения для B из (3.1), решение уравнения (3.9) при $k \neq i\xi/4$ имеет вид:

$$\overset{1}{B}_1 = \frac{b(k)}{-i\partial_k S}. \tag{3.13}$$

Не определенное здесь решение однородного уравнения для B – аналитическая функция от $\bar{k}$ – получено ниже, после анализа асимптотического разложения в окрестности точки $k = i\xi/4$.

Уравнение для $\overset{1}{A}$ определяется неосциллирующими членами уравнения (3.9). С помощью формулы Коши-Грина получим:

$$\overset{1}{A}(k,\xi) = \frac{-1}{8i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dp \wedge d\bar{p}}{k-p} \frac{|b(p)|^2}{p - \frac{i\xi}{4}}. \tag{3.14}$$

Поправка $\overset{2}{A}$ определяется осциллирующими членами (3.9):

$$\overset{2}{A} = \frac{\bar{b}(k)\, \overset{1}{B}_0}{i\partial_{\bar{k}} S}.$$

В этой формуле присутствует $\overset{1}{B}_0$, поэтому $\overset{2}{A}$ может быть построена после анализа асимптотики в окрестности $k = i\xi/4$.

Установим область, в которой пригодно асимптотическое разложение (3.7), (3.8). В этой области для слагаемых в формуле (3.8) выполняется условие:

$$t^{-2}\, \overset{2}{B}(k,\xi) = o(t^{-1}\, \overset{1}{B}_1(k,\xi)).$$

Из формулы (3.13) легко видеть, что функция $\overset{1}{B}_1$ в точке $k = i\xi/4$ имеет полюс первого порядка по k. Решение уравнения (3.12) – функция $\overset{2}{B}$ – в точке $k = i\xi/4$ имеет полюс третьего порядка по k. Поэтому асимптотическое разложение (3.6) пригодно при $|k - \frac{i\xi}{4}| \geq C\, t^{-1/2+\gamma}$, для $\forall \gamma > 0$.

Построим внутреннее разложение – справедливое в малой окрестности точки $k = \frac{i\xi}{4}$.

Перейдем к растянутым координатам:

$$l = \sqrt{t}(k - \frac{i\xi}{4}).$$

В этих координатах фаза экспоненты в системе (3.1) имеет вид:

$$itS = 2i(l^2 + \bar{l}^2) + itS_0.$$

Здесь

$$S_0 = S|_{k=\frac{i\xi}{4}} = \frac{1}{8}(\xi^2 + \bar{\xi}^2).$$

Оператор дифференцирования по k в системе уравнений (3.1) перепишем через дифференцирование по l. В результате система уравнений (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\partial_{\bar{l}}A &= -\bar{b}\exp(-2i(l^2+\bar{l}^2) - itS_0)B, \\ \sqrt{t}\partial_l B &= b\exp(2i(l^2+\bar{l}^2) + itS_0)A. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Формальное асимптотическое решение системы (3.15) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} A &= 1 + t^{-1/2} \overset{1}{\alpha} (l,\xi) \, + \, t^{-1} \overset{2}{\alpha} (l,\xi) + \dots, \\ B &= \big(t^{-1/2} \overset{1}{\beta} (l,\xi) \, + \, t^{-1} \overset{2}{\beta} (l,\xi) + \dots\big) \exp(2i(l^2+\bar{l}^2) + itS_0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Подставим (3.16) в (3.15). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t, в результате получим уравнения для $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{1}{\beta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{l}} \overset{1}{\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial l} \overset{1}{\beta} + 4il \overset{1}{\beta} &= b\big(\tfrac{i\xi}{4}\big) \end{aligned} \tag{3.17}$$

и уравнения для $\overset{2}{\alpha}$, $\overset{2}{\beta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{l}} \overset{2}{\alpha} &= -\overline{b\big(\tfrac{i\xi}{4}\big)} \overset{1}{\beta}, \\ \frac{\partial}{\partial l} \overset{2}{\beta} + 4il \overset{2}{\beta} &= b\big(\tfrac{i\xi}{4}\big) \overset{1}{\alpha} + l\, b_1 + \bar{l}\, b_2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь $b_1 = \partial_k b|_{k=\frac{i\xi}{4}}$, $\quad b_2 = \partial_{\bar{k}} b|_{k=\frac{i\xi}{4}}$.

Область $|l| \le \mathrm{const}\, t^{1/2-\delta}$, $\forall\delta > 0$, где справедливо внутреннее разложение, при $\delta < 1/2$ пересекается с областью $|k - \frac{i\xi}{4}| \ge t^{-1/2+\gamma}\mathrm{const}$ при $\gamma < 1/2$, в которой пригодно внешнее разложение. Следуя методу согласования асимптотических разложений [29], асимптотики при $|l| \to \infty$ для

(3.17), (3.18) можно получить из согласования внутреннего и внешнего асимптотических разложений в области, где пригодны оба разложения.

Асимптотика $\overset{1}{B}_1$ при $k \to \frac{i\xi}{4}$:

$$\overset{1}{B}_1 = \frac{-1}{i(4k-i\xi)} b\left(\frac{i\xi}{4}\right) - \frac{1}{4i} b_1 - \frac{\overline{(k-\frac{i\xi}{4})}}{4i(k-\frac{i\xi}{4})} b_2 + O(|k-\frac{i\xi}{4}|). \qquad (3.19)$$

Вычислим асимптотику $\overset{1}{A}$ при $k \to \frac{i\xi}{4}$.

$$\overset{1}{A} = \frac{-1}{k-\frac{i\xi}{4}} \frac{1}{8i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\bar{p} |b(p)|^2 \left[\frac{1}{k-p} - \frac{1}{p-\frac{i\xi}{4}}\right].$$

Подынтегральная функция в интеграле для $\overset{1}{A}$ представлена в виде разности. Рассмотрим этот интеграл как разность интегралов от соответствующих функций. В первом из получившихся интегралов сделаем замену переменной $r = p-(k-\frac{i\xi}{4})$. Представим числитель подынтегральной функции в первом интеграле в виде отрезка ряда Тейлора в окрестности точки r. В результате получим:

$$\overset{1}{A} = \frac{-1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\frac{i\xi}{4}-r} \frac{1}{4i}(\partial_r |b(r)|^2 + \frac{\overline{k-\frac{i\xi}{4}}}{k-\frac{i\xi}{4}} \partial_{\bar{r}} |b(r)|^2) =$$

$$= \frac{1}{4i} \frac{\overline{k-\frac{i\xi}{4}}}{k-\frac{i\xi}{4}} |b(\frac{i\xi}{4})|^2 + C(\frac{i\xi}{4}) + O(|k-\frac{i\xi}{4}|), \qquad (3.20)$$

где

$$C(\frac{i\xi}{4}) = \frac{-1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\frac{i\xi}{4}-r} \frac{1}{4i} \partial_r |b(r)|^2.$$

Из требования согласования асимптотических разложений (3.6) и (3.7) и формул (3.19), (3.20) получаются краевые условия:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\alpha} &= 0, \quad \text{при} \quad |l| \to \infty, \\ \overset{1}{\beta} &= O(l^{-1}), \quad \text{при} \quad |l| \to \infty; \end{aligned} \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\alpha} &= \frac{\bar{l}}{4il} |b(\frac{i\xi}{4})|^2 + C(\frac{i\xi}{4}) + O(|l|^{-1}), \quad \text{при} \quad |l| \to \infty \\ \overset{2}{\beta} &= \frac{1}{4i} b_1 - \frac{\bar{l}}{4il} b_2 + O(|l|^{-1}), \quad \text{при} \quad |l| \to \infty. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Решение первого из уравнений (3.17) совместно с краевым условием из (3.21) имеет вид:

$$\overset{1}{\alpha} = 0. \qquad (3.23)$$

Ограниченное решение уравнения (3.17) с краевым условием из (3.21) получается с помощью формулы Коши-Грина:

$$\overset{1}{\beta} = \exp(-2i(l^2+\bar{l}^2))\, b\Big(\frac{i\xi}{4}\Big)\frac{-1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{n-l}}\exp(2i(n^2+\bar{n}^2)). \qquad (3.24)$$

Асимптотика $\overset{1}{\beta}$ при $|l|\to\infty$ имеет вид:

$$\overset{1}{\beta}\,|_{|l|\to\infty} = \frac{b(\frac{i\xi}{4})\exp(-2i(l^2+\bar{l}^2))}{2\bar{l}} - \frac{b(\frac{i\xi}{4})}{4il} + O(|l|^2). \qquad (3.25)$$

Из согласования асимптотик (3.19), (3.25) и (3.6) получим:

$$\overset{1}{B}_0\,(\bar{k},\frac{i\xi}{4}) = \frac{b(\frac{i\xi}{4})}{2\overline{(k-\frac{i\xi}{4})}}. \qquad (3.26)$$

Уравнения (3.18) с краевыми условиями (3.22) решаются с помощью формулы Коши-Грина:

$$\begin{aligned}\overset{2}{\alpha}\ &= C\big(\tfrac{i\xi}{4}\big) + \overline{b\big(\tfrac{i\xi}{4}\big)}\,\tfrac{-1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\tfrac{dn\wedge d\bar{n}}{n-l}\,\overset{1}{\beta}\,(n,\bar{n}),\\ \overset{2}{\beta}\ &= \exp(-2i(l^2+\bar{l}^2))\,\tfrac{-1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\tfrac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{n-l}}\times\\ &\quad\times\exp(2i(n^2+\bar{n}^2))\,(nb_1+\bar{n}b_2).\end{aligned} \qquad (3.27)$$

Теорема 8 об асимптотике решения задачи (3.1) доказана.

3.1.2 Оценка остатка асимптотики

В этом пункте доказано, что формулы (3.6), (3.7) определяют асимптотику решения задачи (3.1). Рассматривается система интегральных уравнений, соответствующая краевой задаче (3.1). При ограничении (3.2) на функцию $b(k)$ интегральный оператор в этой системе оказывается сжимающим. На основе формул (3.6), (3.7) построено составное асимптотическое разложение (3.6). Малость остатка асимптотики следует из свойства интегрального оператора и малости невязки, которая получается при подстановке составного разложения в систему интегральных уравнений.

Справедливо утверждение:

Теорема 9. *Пусть $b(k)$ – гладкая функция такая, что все ее производные по k и $\bar{k}$ до второго порядка – гладкие интегрируемые в $\mathbb{R}^2$, и выполнено условие:*

$$\frac{1}{\pi}\max_{\zeta\in\mathbb{C}}\int\int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu\,\frac{|b(\lambda+i\mu)|}{|\lambda+i\mu-\zeta|}<1,$$

тогда решение задачи (3.1) существует. Его асимптотика при $t\to\infty$ определяется формулами (3.6), (3.7) с точностью $O(t^{-5/4})$. Производные по z и $\bar{z}$ остатка асимптотики – непрерывные равномерно ограниченные при $k,z\in\mathbb{C}$ – равны $O(t^{-5/4})$.

Перейдем к доказательству этой теоремы.

Вместо системы уравнений (3.1) рассмотрим соответствующую ей систему интегральных уравнений [93]:

$$A=1+\frac{-1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\overline{b(p)}\exp(-itS)B(p,\xi,\bar{\xi},t),$$
$$B=\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dp\wedge d\bar{p}}{\overline{k-p}}\,b(p)\exp(itS)A(p,\xi,\bar{\xi},t). \tag{3.28}$$

Пусть X – пространство непрерывных по k вектор-функций с нормой

$$||\phi||=\sup_{k,z\in\mathbb{C}}|\phi_1(k,z)|\,+\,\sup_{k,z\in\mathbb{C}}|\phi_2(k,z)|.$$

Обозначим интегральный оператор в правой части (3.28) через $\mathcal{G}$. Свойства оператора $\mathcal{G}$ будем исследовать в пространстве X.

Лемма 4. $||\mathcal{G}\phi||\le M||\phi||$, *где* $M<1$.

Доказательство.

$$||\mathcal{G}\phi||=\sup_{k,z\in\mathbb{C}}\left[\left|\frac{i}{2\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\overline{b(p)}\exp(-itS)\phi_2(p,\xi,t)\right|\right]+$$
$$+\sup_{k,z\in\mathbb{C}}\left[\left|\frac{i}{2\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dp\wedge d\bar{p}}{\overline{k-p}}\,b(p)\exp(itS)\phi_1(p,\xi,t)\right|\right]\le$$
$$\le\frac{1}{\pi}||\phi||\max_{k\in\mathbb{C}}\int\int_{\mathbb{R}^2}\frac{dx'dy'}{|k-(x'+iy')|}|b(x'+iy')|=M||\phi||,$$

где
$$M = \frac{1}{\pi} \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx'dy'}{|k - x' - iy'|} |b(x' + iy')|.$$
Лемма доказана.

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{G}$ переводит вектор-функции из X в X.*

Для доказательства достаточно показать непрерывность по k вектор-функции $\mathcal{G}[b, k; z, t]\phi$. Это можно сделать аналогично [9] (см. 2.2.1).

Из из приведенных лемм легко видеть, что при выполнении условия (3.2) оператор $\mathcal{G}$ является сжимающим в пространстве X. Из теоремы о сжимающих отображениях [47] следует, что интегральное уравнение

$$\phi = \mathcal{G}\phi + h, \tag{3.29}$$

где $h \in X$ имеет единственное решение в X. Для ϕ справедлива оценка:

$$||\phi|| \leq \mathrm{const}||h||.$$

Построим составное асимптотическое разложение для формального асимптотического решения системы уравнений (3.1). Для этого воспользуемся гладкой срезающей функцией $\chi(k, \xi, t)$, такой, что $\chi \equiv 1$, при $|k - \frac{i\xi}{4}| > 2t^{-1/4}$ и $\chi \equiv 0$, при $|k - \frac{i\xi}{4}| < t^{-1/4}$. Составное разложение имеет вид:
$$\tilde{A}(k, \xi, t) = 1 + \chi\, t^{-1} \overset{1}{A} + (1 - \chi)t^{-1} \overset{2}{\alpha}; \tag{3.30}$$
$$\tilde{B}(k, \xi, t) = \left[\chi\, (t^{-1} \overset{1}{B} + (1 - \chi)(t^{-1/2} \overset{1}{\beta} + t^{-1} \overset{2}{\beta})\right] \exp(itS). \tag{3.31}$$

Посчитаем невязку, которая получается при подстановке составного асимптотического разложения (3.30), (3.31) в (3.1).

$$f_1 = -\partial_{\bar{k}}\tilde{A} - \bar{b}\exp(-itS)\tilde{B},$$

$$f_2 = -\partial_k\tilde{B} + b\exp(itS)\tilde{A}.$$

Невязки f_1 и f_2 вне переходного слоя $t^{-1/4} < |k - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}$ легко вычисляются, исходя из асимптотик (3.6), (3.7). В переходном слое в невязки вносят вклад производные по k и $\bar{k}$ срезающей функции χ. Ширина этого слоя равна $t^{-1/4}$. В качестве χ можно выбрать функцию, производные которой по k и $\bar{k}$ равны $O(t^{1/4})$. В результате для f_1 и f_2 получим:

$$f_1 = \begin{cases} -t^{-1}\bar{b} \overset{1}{B}_0 (\bar{k},\xi)\exp(it(S_0 - S)), \quad \text{при}\, |k - \frac{i\xi}{4}| \geq 2t^{-1/4}; \\ O(t^{1/4})(t^{-1} \overset{1}{B} \exp(-itS) - t^{-1/2} \overset{1}{\beta} - t^{-1} \overset{2}{\beta})\bar{b} - \\ -\chi\, t^{-1}\bar{b} \overset{1}{B}_0 \exp(it(S_0 - S)) + \\ +(1-\chi)t^{-1}\bar{b} \overset{2}{\beta}, \quad \text{при}\, t^{-1/4} < |k - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}; \\ -t^{-1}\bar{b} \overset{2}{\beta} (l,\xi), \quad \text{при}\, |k - \frac{i\xi}{4}| \leq t^{-1/4}; \end{cases} \tag{3.32}$$

$$f_2 = \begin{cases} t^{-1} b \overset{1}{A} \exp(itS), \quad \text{при}\, |p - \frac{i\xi}{4}| > 2t^{-1/4}; \\ \left[O(t^{1/4})(t^{-1} \overset{1}{A} - t^{-1} \overset{2}{\alpha}) - (1-\chi)\, t^{-1} \overset{2}{\alpha}\right] \times \\ \times b\exp(itS), \quad \text{при}\, t^{-1/4} < |k - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}; \\ -t^{-1} b \overset{2}{\alpha} (l,\xi)\exp(itS), \quad \text{при}\, |p - \frac{i\xi}{4}| \leq t^{-1/4}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Порядок невязок f_1 и f_2 вне переходного слоя легко оценивается из формул (3.32), (3.33) и (3.19), (3.20). Оценим порядок множителей при $O(t^{1/4})$ в переходном слое.

$$t^{-1} \overset{1}{A} - t^{-1} \overset{2}{\alpha} = O(t^{-5/4}), \quad \text{при}\, t^{-1/4} < |k - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}; \tag{3.34}$$

$$t^{-1} \overset{1}{B} - t^{-1/2} \overset{1}{\beta} - t^{-1} \overset{2}{\beta} = O(t^{-5/4}), \text{при}\, t^{-1/4} < |k - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}. \tag{3.35}$$

Формула (3.34) следует из (3.20), (3.22). Формула (3.35) получена из (3.19), (3.8), (3.21), (3.22).

Перейдем к оценке остатка. Будем искать решение в виде:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + \chi, \tag{3.36}$$

Подставим (3.36) в (3.1). В результате получим систему уравнений с однородными краевыми условиями при $|k| \to \infty$.

$$\partial_{\bar{k}}\Phi_1 \quad = -\bar{b}\exp(-itS)\Phi_2 \,+\, f_1 \tag{3.37}$$

$$\partial_k\Phi_2 \quad = b\exp(itS)\Phi_1 \,+\, f_2. \tag{3.38}$$

От системы уравнений (3.38) перейдем к соответствующей системе интегральных уравнений.

$$\Phi = \mathcal{G}\Phi + F. \tag{3.39}$$

Здесь компоненты вектор-функции F вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} F_1 &= \tfrac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \tfrac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\, f_1, \\ F_2 &= \tfrac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \tfrac{dp\wedge d\bar{p}}{\overline{k-p}}\, f_2. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Оценим норму в X вектор-функции F.

Лемма 6. $||F|| = O(t^{-5/4})$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} ||F_1||_C \le \sup\nolimits_{k,z\in\mathbb{C}} \Bigg[\Bigg| \tfrac{1}{2i\pi} \int\int_{|p-\frac{i\xi}{4}|\ge 2t^{-1/4}} \tfrac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\, f_1(p,\xi,t)\ + \\ + \big| \tfrac{1}{2i\pi} \int\int_{|p-\frac{i\xi}{4}|\le 2t^{-1/4}} \tfrac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\, f_1(p,\xi,t) \Bigg| \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Оценка первого слагаемого сводится к оценке интеграла:

$$I = \int\int_{|p-\frac{i\xi}{4}|\ge 2t^{-1/4}} \frac{dp\wedge d\bar{p}}{k-p}\, \bar{b}(p)\, \frac{\exp(it(S_0 - S))}{\overline{(p-\frac{i\xi}{4})}}.$$

Область интегрирования не содержит стационарную точку фазы экспоненты, поэтому можно применить формулу интегрирования по частям, интегрируя быстро осциллирующую экспоненту по переменной $\bar{p}$. В результате получим, что $|I| \le t^{-1/4}$. Таким образом, первое слагаемое в (3.41) оценивается величиной $O(t^{-5/4})$.

Оценим второе слагаемое в (3.41). Здесь воспользуемся малостью области интегрирования. Это слагаемое также оценивается величиной $O(t^{-5/4})$.

Вторая компонента вектор-функции F оценивается аналогично:

$$||F_2|| \le t^{-5/4}\mathrm{const}.$$

Лемма доказана.

Вектор-функция F в системе уравнений (3.39) принадлежит X и система (3.39) разрешима в X. Оценим норму этого решения.

Представим F в виде:

$$F = t^{-5/4}\, H.$$

Из приведенной леммы следует, что $||H|| = O(1)$.

Вектор-функцию Ψ будем искать в виде:

$$\Psi = t^{-5/4}\phi.$$

Вектор-функция ϕ удовлетворяет системе уравнений:

$$\phi = \mathcal{G}\phi + H. \tag{3.42}$$

Из разрешимости системы интегральных уравнений (3.42) следует оценка остатка в асимптотических формулах (3.6), (3.7) величиной $O(t^{-5/4})$.

Докажем гладкость остатка по z.

Лемма 7. *$\partial_z\phi$, $\partial_{\bar{z}}\phi \in X$.*

Доказательство. Продифференцируем по z систему интегральных уравнений (3.42). В результате получим:

$$\theta = \mathcal{G}\theta + P, \tag{3.43}$$

здесь $\theta = \partial_z\phi, \quad P = \partial_z[\mathcal{G}]\phi + \partial_z H.$

Покажем, что $P \in X$. Для этого оценим норму в X каждого из слагаемых P.

$$\partial_z[\mathcal{G}]\phi = \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dp\wedge d\bar{p}\, p}{2i\pi}\begin{bmatrix} 0 & \frac{-\overline{b(p)}\exp(-itS)}{k-p} \\ \frac{b(p)\exp(itS)}{\overline{k-p}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}.$$

Из интегрируемости $b(k)$ в $\mathbb{R}^2$ и равномерной ограниченности ϕ_1, ϕ_2 следует, что $\partial_z[\mathcal{G}]\phi \in X$.

$$\partial_z H = t^{5/4}\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} dp\wedge d\bar{p}\begin{bmatrix} \frac{\partial_z f_1}{k-p} \\ \frac{\partial_z f_2}{\overline{k-p}} \end{bmatrix}.$$

Производные f_1 и f_2 по z вычисляются из (3.32), (3.33). В результате получим $||\partial_z H|| = O(1)$. Таким образом, $P \in X$. Система (3.43) разрешима в X, то есть: $\partial_z\phi \in X$. Для производной ϕ по $\bar{z}$ доказательство аналогично. Лемма доказана.

Этим заканчивается доказательство теоремы 9.

3.1.3 Асимптотика решения ДС-2

Подставим асимптотику решения задачи (1.1) в формулу (1.12).

$$\begin{aligned} q(z,t) = & \tfrac{-i}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(itS) \times \\ & \times \Big(1 + t^{-1} \tilde{A}_1(p,\xi,t) + t^{-5/4} \phi_1(p,\xi,t) \Big), \end{aligned} \tag{3.44}$$

где

$$\tilde{A}_1(p,\xi,t) = \chi \overset{1}{A} + (1-\chi) \overset{2}{\alpha} .$$

Представим интеграл (3.44) в виде суммы интегралов.

$$\begin{aligned} q(z,t) & = \tfrac{-i}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(itS) - \\ & - t^{-1} \tfrac{i}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(itS) \tilde{A}_1(p,\xi,t) - \\ & - t^{-5/4} \tfrac{i}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(itS) \phi_1(p,\xi,t). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно $O(t^{-5/4})$. Интеграл во втором слагаемом разобьем на два. При $|p - \frac{i\xi}{4}| \geq 2t^{-1/4}$ этот интеграл оценивается с помощью интегрирования по частям и имеет порядок t^{-1}. При $|p - \frac{i\xi}{4}| < 2t^{-1/4}$ легко видеть, что этот интеграл равен $O(t^{-1/2})$. В результате получим:

$$q(z,t) = \frac{-i}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} dp \wedge d\overline{p}\, b(p) \exp(itS) \, + \, O(t^{-5/4}).$$

Асимптотика по t интеграла в этой формуле вычисляется методом стационарной фазы [78]. В результате получается формула (3.3).

Асимптотика функции $g(z,t)$ получается после подстановки (3.3) в формулу (1.13). Вычисление интеграла в смысле главного значения возможно из-за гладкости по z остатка в формуле (3.3). Эта гладкость – следствие гладкости по z остатка асимптотики в формулах (3.6) и (3.7), и гладкости по z асимптотики интеграла в (3.44), вычисленной методом стационарной фазы. Именно для гладкости асимптотики интеграла в (3.44) необходимо условие интегрируемости в $\mathbb{R}^2$ функции $k\, b(k)$. Теорема об асимптотике решения уравнений ДС-2 доказана.

3-2 Асимптотика решения уравнений Ишимори-1

Асимптотика решения уравнений Ишимори-1 при $t \to \infty$ с краевым условием $\tilde{S}|_{|z|\to\infty} = \sigma_3$ может быть получена из формулы (1.21). После подстановки асимптотики решения краевой задачи (1.10), построенной в предыдущем разделе, получим:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{t^{1/2}} \overset{1}{\beta} \\ \frac{2}{t^{1/2}} \overset{1}{\beta} & 1 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}), \tag{3.45}$$

где $\overset{1}{\beta}(l)$– решение краевой задачи:

$$\partial_l \overset{1}{\beta} + 4il \overset{1}{\beta} = b(i\xi/4), \quad \overset{1}{\beta}|_{|l|\to\infty} = 0.$$

Переменные l и ξ связаны с переменными x, y, t формулами:

$$l = \frac{x+iy}{\sqrt{t}}, \quad \xi = \frac{x+iy}{t}.$$

Функция $b(k)$ удовлетворяет условиям теоремы 7

3-3 Асимптотика решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили

Свойства решений и процедура интегрирования уравнения Кадомцева-Петвиашвили (КП):

$$\partial_x(\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) = -3\sigma^2\partial_y^2 u \tag{3.46}$$

зависят от знака σ^2. В случае $\sigma^2 = 1$ это уравнение называется КП-2.

Здесь исследуется решение задачи Коши:

$$u|_{t=0} = u_0(x, y). \tag{3.47}$$

Для убывающего по пространственным переменным решения построена асимптотика при $t \to \infty$. Главный член асимптотики имеет порядок $O(t^{-1})$ и быстро осциллирует. Амплитуда осцилляций зависит от характерных переменных $\xi = x/t$ и $\eta = y/t$.

Нетрудно догадаться, что для убывающего решения при $t \to \infty$ основную роль в уравнении (3.46) играет его линейная часть. Это подтверждается на уровне главного члена асимптотики, структура которого полностью соответствует асимптотике решения линеаризованного уравнения. Более того, так же, как для линейного уравнения, асимптотика решения извлекается из интеграла типа Фурье применением метода стационарной фазы. Представление решения нелинейного уравнения через интеграл типа Фурье следует из метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), предложенного для уравнения КП в [28, 21].

Несмотря на похожее поведение убывающих решений линейного и нелинейного уравнения, специфика нелинейного уравнения (3.46) проявляется в том, что роль образа Фурье играют данные рассеяния вспомогательной линейной задачи, связанной с уравнением КП-2. Кроме того, вместо экспоненты в интеграле типа Фурье используется решение так называемой $\bar{D}$-задачи [88].

Уравнение похожее на (3.46) с нелинейностью более высокого порядка обычно называется обобщенным уравнением КП. Для обобщенного уравнения КП известны результаты об оценке нормы решения в пространстве Соболева по времени [115]. В той же работе для убывающего решения получена структура асимптотики при $t \to \infty$. Как уже отмечалось, главный член асимптотики убывающего решения определяется линейными слагаемыми. Эти слагаемые у уравнений КП и обобщенного КП совпадают. Поэтому и структура главного члена асимптотики убывающего решения, построенного в настоящей работе, совпадает со структурой убывающей асимптотики обобщенного уравнения КП из [115]. Существенное отличие проведенных здесь построений для уравнения КП от результатов [115] состоит в том, что построенная асимптотика связана с начальными данными. Такая связь устанавливается с помощью МОЗР благодаря интегрируемости уравнения КП.

Одним из важнейших достижений МОЗР является возможность исследования асимптотик решений нелинейных уравнений. Сравнительно полно исследованы асимптотики для 1+1-мерных уравнений (одна пространственная переменная и время) [92, 84, 58, 25, 135, 64, 8, 30].

Для двумерного обобщения цепочки Тоды асимптотика была построена в [65]. Строгие результаты об асимптотиках по времени для специального класса неубывающих при $t \to \infty$ решений уравнений КП получены в [3], [68]. Формальная асимптотика при $t \to \infty$ убывающего решения уравнения КП-1 построена в работе [133]. Однако, в этих случаях построенные асимптотики не обладают свойствами равномерности и пригодны не во всех направлениях. В работе автора [129] для уравнения КП-2 дан исчерпывающий ответ на вопрос об асимптотике убывающего решения равномерно по всем направлениям и получена оценка остатка этой асимптотики.

Здесь будет использован формализм МОЗР, разработанный для уравнения КП-2 в работе [88]. Этот формализм позволяет свести построение решения нелинейного интегрируемого уравнения к последовательности линейных задач. Напомним основные этапы решения задачи Коши для уравнения КП-2 с помощью МОЗР.

Первый этап – решение прямой задачи рассеяния на начальном потенциале $u_0(x, y)$:

$$-\partial_y \varphi + \partial_x^2 \varphi + 2ik\partial_x \varphi + u_0 \varphi = 0, \quad \varphi|_{|k| \to \infty} = 1, \tag{3.48}$$

и вычисление данных рассеяния по формуле[1]:

$$F(k) = \quad (2\pi)^{-1}\mathrm{sgn}(-\Re(k)) \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y)\varphi(x,y,k,0) \times \\ \times \exp(-i(k+\bar{k})x - (k^2-\bar{k}^2)y). \qquad (3.49)$$

На следующем этапе определяется зависимость данных рассеяния от времени. Она оказывается тривиальной:

$$\mathcal{F}(k;t) = F(k)\exp(4it(k^3+\bar{k}^3)).$$

Третий этап – решение обратной задачи рассеяния – восстановление потенциала $u(x,y,t)$. Эта задача сводится к так называемой $\bar{D}$-задаче, решение которой позволяет определить зависимость от времени функции φ:

$$\begin{array}{c} \partial_{\bar{k}}\varphi = \psi\, F(-\bar{k})\exp(itS), \\ \partial_k\psi = -\varphi\, F(k)\exp(-itS); \end{array} \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\Big|_{|k|\to\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.50)$$

Здесь $S = 4(k^3+\bar{k}^3) + (k+\bar{k})\xi - i(k^2-\bar{k}^2)\eta, \quad \xi = x/t,\ \eta = y/t.$

Последний шаг состоит в вычислении интеграла, дающего решение исходной задачи Коши [88]:

$$u(x,y,t) = \partial_x \int\int_{\mathbb{C}} dk\wedge d\bar{k}\, F(k)\psi(k,x,y,t)\exp(itS). \qquad (3.51)$$

В работах [57, 63, 141, 53, 110, 114] изучалась разрешимость прямой задачи для некоторого класса начальных условий. В частности, в [114] доказано, если функция $u_0(x,y)$ экспоненциально убывает по пространственным переменным, тогда прямая задача (3.48) разрешима для $\forall k\in\mathbb{C}$.

Однако, для более–менее общих начальных условий такой последовательный метод решения интегрируемых уравнений не дает явного ответа в терминах начальных данных из-за трудностей, встречающихся при решении как прямой так и обратной задач.

Поэтому для построения решения исходного нелинейного уравнения обычно используется только обратная задача. Она включает время как

[1] Из формул (3.48) и (2.15) следует, что для вещественных $u_0(x,y)$ функция $F(k)$ обладает свойством: $F(-\bar{k}) = -\bar{F}(k)$, функция $F(k)$ – неаналитическая функция комплексной переменной $k\in\mathbb{C}$.

параметр. Временная эволюция данных рассеяния определяет нелинейное уравнение. Класс решений нелинейного уравнения в таком подходе определяется тем или иным функциональным классом данных рассеяния.

Этот же подход используется и здесь. Все необходимые для построений ограничения на начальные данные сформулированы в терминах данных рассеяния. Подробное исследование класса начальных данных, удовлетворяющих этим ограничениям, здесь не обсуждается. Исследованию решения $\bar{D}$-задачи посвящена основная часть этого раздела. Построена асимптотика функции ψ и затем вычислена асимптотика интеграла (3.51) при $t \to \infty$ методом стационарной фазы [78]. Как оказалось, главный член асимптотики решения уравнения КП-2 можно определить, используя только главный член асимптотического разложения. Принимая во внимание быстро осциллирующие коэффициенты в системе уравнений (3.50), можно догадаться, что $\psi = 1 + o(1)$ при $t \to \infty$. Однако, этого недостаточно для выяснения асимптотических свойств решения $u(x, y, t)$, если неизвестны аналитические и асимптотические свойства остатка в формуле для ψ. Таким образом мы приходим к необходимости изучения свойств решения задачи (3.50) при $t \to \infty$.

Асимптотика решения $\bar{D}$-задачи для системы уравнений с непрерывными коэффициентами при $t \to \infty$ была построена автором в [45]. Здесь исследуется $\bar{D}$ задача с коэффициентами, разрывными на мнимой оси комплексного параметра k (3.49). Построение асимптотики решения такой задачи более сложно как с идейной, так и с технической стороны. Структура асимптотики решения (3.50) в отличие от рассмотренной в [45] определяется не только характером стационарных точек, но и их положением относительно линии разрыва коэффициентов. Это вносит существенные дополнительные трудности в вычисления и приводит к изменениям в результатах построений. Равномерная асимптотика строится методом согласования [29].

3.3.1 Основной результат

Теорема 10. *Пусть начальная функция $u_0(x, y)$ такова, что ее данные рассеяния обладают свойством: $(1 + |k|)F \in L_1 \cap C$, $\partial^\alpha F \in L_1 \cap C$ при $\Re(k) \neq 0$, $|a| \leq 2$ и выполнено условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int\int_{\mathbb{R}^2} d\kappa d\lambda \left| \frac{F(\kappa + i\lambda)}{\kappa + i\lambda - z} \right| < \pi. \tag{3.52}$$

Тогда решение задачи Коши для уравнения КП-2 существует и единственно при $\forall t > 0$. Его асимптотика при $t \to \infty$ различна в различных направлениях, которые описываются характеристическими переменными $\xi = x/t$ и $\eta = y/t$:
1) при $-(12\xi + \eta^2)t^{1/3} \gg 1$:

$$u(x, y, t) = -4t^{-1} \exp\left(- 11it\sqrt{-\frac{y^2}{t^2} - 12\frac{x}{t}} \right) \times$$
$$\times \left[\frac{\pi}{12i\sqrt{-\eta^2 - 12\xi}} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\eta^2 - 12\xi} + \frac{i\eta}{12} \right) + o(t^{-1}) \right] + c.c.;$$

2) при $(12\xi + \eta^2)t^{1/3} \gg 1$:

$$u = o(t^{-1});$$

при $|12\xi + 12\eta^2| \ll 1$:

$$u(x, y, t) = 8it^{-1}\sqrt{\pi} f(i\eta/12) \left(\int_0^\infty dp_1 \sqrt{p_1} \cos\left(8p_1^3 - zp_1 \right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty dp_1 \sqrt{p_1} \sin\left(8p_1^3 - zp_1 \right) \right) + o(t^{-1}).$$

Здесь

$$z = 8\left(\frac{y^2}{12t^{4/3}} + \frac{x}{t^{1/3}} \right);$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x, y)\varphi(x, y, k, 0) \times$$
$$\times \exp(-i(k + \bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y).$$

Области пригодности различных асимптотик, указанные в теореме, пересекаются. В областях пересечения асимптотики совпадают. Поэтому можно представить составную асимптотику решения, равномерно в плоскости переменных x, y.

3.3.2 Аналитические свойства данных рассеяния

Здесь изучены свойства данных рассеяния, который соответствуют достаточно гладким, убывающим функциям из (3.47).

Прежде, чем переходить к изучению аналитических свойств данных рассеяния докажем, что решение задачи (3.50) существует.

Теорема 11. *Пусть $F(k)$ удовлетворяет условию (3.52), тогда решение задачи (3.50) существует в пространстве непрерывных ограниченных при $k \in \mathbb{C}$ вектор-функций.*

Доказательство. Перейдем от краевой задачи (3.50) к системе интегральных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + G[F] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix},$$

где

$$G[F]V = \frac{1}{2i\pi} \int \int_{m \in \mathbb{C}} dm \wedge d\bar{m} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 0 & \frac{F(-\bar{m})}{k-m} \exp(itS) \\ \frac{\overline{F(m)}}{k-m} \exp(-itS) & 0 \end{pmatrix} V(m, \xi, \eta, t).$$

Пользуясь стандартными результатами для операторов с полярным ядром [9] можно показать, что оператор $G[F]$ действует из пространства непрерывных вектор-функций в пространство непрерывных вектор-функций.

Из неравенства (3.52) следует, что оператор $G[F]$ – сжимающий. Отсюда следует утверждение теоремы.

Для построения асимптотик нам необходимо изучить гладкость функции $F(k)$ в окрестности линии разрыва $\Re(k) = 0$. Обычно для исследования свойств данных рассеяния прибегают к изучению прямой задачи. Однако, некоторые свойства данных рассеяния можно получить, оставаясь в рамках обратной задачи. В частности, здесь мы воспользуемся формулой (3.49) и системой уравнений (3.50) для выяснения гладкости данных рассеяния в окрестности мнимой оси параметра k.

Лемма 8. *Пусть $u_0(x,y)$ – финитная функция, тогда в окрестности $k' \in \mathbb{C}$ данные рассеяния можно представить в виде:*

$$F(k) = sgn[\Re(-k)] \sum_{|\alpha|=0}^{2} f_{\alpha_1\alpha_2}(k')(k-k')^{\alpha_1}\overline{(k-k')^{\alpha_2}} + O(|k-k'|^3),$$

где $f_{\alpha_1,\alpha_2}(k')$ – непрерывные функции, если $\Re(k') \neq 0$ и

$$f_{\alpha_1,\alpha_2}(k') = f^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2}(k') + sgn[\Re(-k)] f^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2}(k'),$$

если $\Re(k') = 0$.

Доказательство этой леммы состоит в последовательном вычислении производных данных рассеяния по k и $\bar{k}$. Для примера при $\Re(k') = 0$ вычислим $f^{(1)}_{10}(k')$ и $f^{(2)}_{10}(k')$.

Обозначим

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y)\varphi(x,y,k,0) \exp(-i(k+\bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y).$$

Тогда $f^{(1)}_{00}(k') = f(k')$, $f^{(2)}_{00}(k') \equiv 0$.

Вычислим $f_{10}(k') = f^{(1)}_{10}(k') + \mathrm{sgn}[\Re(-k)] f^{(2)}_{10}(k')$.

$$\partial_k f(k) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y)\big[(ix - 2ky)\varphi(x,y,k,0) + \partial_k\varphi(x,y,k,0)\big] \times$$

$$\times \exp(-i(k+\bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y).$$

Для вычисления производной $\partial_k\varphi$ воспользуемся интегральным уравнением для функции φ

$$\partial_k\varphi = \frac{-1}{2i\pi} V.P. \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{(k-m)^2} F(-\bar{m}) \times$$

$$\times \exp(i(m+\bar{m}) - (m^2 - \bar{m}^2)y)\psi(x,y,m).$$

Функции $F(-\bar{m})$ и $\psi(x,y,m)$ – гладкие в правой и левой частях комплексной плоскости m можно показать, что этот интеграл существует. Представим его в более удобном виде. Для этого разобьем интеграл на сумму двух интегралов по правой и левой полуплоскостям комплексной плоскости. Проинтегрируем эти интегралы по частям, интегрируя дробь $1/(k-m)^2$. В результате получим

$$\partial_k \varphi = \frac{-1}{2i\pi} \sum_{\pm} \int_{\partial\Omega^\pm} \frac{(\pm) d\bar{m}}{k-m} f(-\bar{m}) \times$$

$$\times \exp(i(m+\bar{m})x - (m^2 - \bar{m}^2)y)\psi(x,y,m) -$$

$$- \frac{-1}{2i\pi} \sum_{\pm} \int\int_{\Omega^\pm} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{k-m} \Big[(ix - 2my)(\pm) f(-\bar{m})\psi(x,y,m) +$$

$$+ (\pm)\partial_m f(-\bar{m})\psi(x,y,m) - \varphi(x,y,m) f(-\bar{m}) f(m) \Big] \times$$

$$\times \exp(i(m+\bar{m})x - (m^2 - \bar{m}^2)y).$$

Здесь $\Omega^\pm$ – правая (+) и левая (-) полуплоскости. Интеграл по $\partial\Omega^+$ понимается как сумма интегралов по правой половине окружности с центром в начале координат при радиусе окружности стремящемся к бесконечности, несобственного интеграла по мнимой оси и интеграла по окружности малого радиуса ε вокруг точки $k = m$, если она лежит в Ω^+. Направление интегрирования в интеграле по $\partial\Omega^+$ определяется стандартным образом.

Рассмотрим сумму интегралов по $\partial\Omega^\pm$. Каждый из интегралов по большим полуокружностям при $R \to \infty$ стремится к нулю из-за убывания подынтегральной функции. Сумма интегралов по мнимой оси с учетом направления интегрирования дает удвоенный интеграл по мнимой оси в положительном направлении (заметим что на мнимой оси фаза экспоненты равна нулю). Интеграл по малой окружности равен нулю.

В двойном интеграле вычислим производную $\partial_m f(-\bar{m})$ для этого заметим что $\varphi(x,y,k,0) = \psi(x,y,-\bar{k},0)$, следовательно, $f(-\bar{m})$ выражается через функцию $\psi(x,y,m,0)$ и, тогда:

$$\partial_m f(-\bar{m}) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y) \big[-f(m)\varphi(x,y,m,0) +$$

$$+ (-ix - 2my)\psi(x,y,m,0) \big] \exp(-i(m+\bar{m})x - (m^2 - \bar{m}^2)y).$$

Таким образом, для $f_{10}(k')$ получим выражение:

$$f_{10}(k') = f_{10}^{(1)}(k') + \mathrm{sgn}[\Re(-k)] f_{10}^{(2)}(k'),$$

где

$$f_{10}^{(1)}(k') = -f(-\bar{k}')\psi(x,y,k',0)\frac{1}{2\pi i}\int\int_{\mathbb{R}^2} dxdyu_0(x,y)\times$$

$$\times\Bigg[(ix-2ky)\phi(x,y,k,0)+$$

$$+\Bigg(\frac{-1}{2i\pi}\sum_{\pm} V.P.\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\bar{m}}{k'-m}(\pm)f(-\bar{m})\psi(x,y,m,0)-$$

$$-\frac{-1}{2i\pi}\sum_{\pm}\int\int_{\Omega^{\pm}}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{k-m}\Bigg[(ix-2my)(\pm)f(-\bar{m})\psi(x,y,m)+$$

$$+(\pm)\partial_m f(-\bar{m})\psi(x,y,m)-\varphi(x,y,m)f(-\bar{m})f(m)\Bigg]\times$$

$$\times\exp(i(m+\bar{m})x-(m^2-\bar{m}^2)y)\Bigg)\exp(-i(k'+\bar{k}')x-(k'^2-\bar{k}'^2)y)\Bigg];$$

$$f_{10}^{(2)} = \frac{-1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} dxdyu_0(x,y)f(-\bar{k}')\psi(x,y,k',0).$$

Выражение для $f_{01}(k') = f_{01}^{(1)}(k') + \mathrm{sgn}[\Re(-k)]f_{01}^{(2)}(k')$ вычисляется проще:

$$\begin{aligned}
f_{01}^{(1)}(k') &= \tfrac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} dxdy\, u_0(x,y)(-ix+2\bar{k}'y)\varphi(x,y,k',0)\times\\
&\qquad \exp(i(k'+\bar{k}')x-(k'^2-\bar{k}'^2)y),\\
f_{01}^{(2)}(k') &= \tfrac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} dxdy\, u_0(x,y)\psi(x,y,k',0)\times\\
&\qquad \times\exp(2i(k'+\bar{k}')x-2(k'^2-\bar{k}'^2)y).
\end{aligned}$$

Выражения для остальных коэффициентов разложения вычисляются аналогично. Лемма доказана.

3.3.3 Асимптотическое решение $\bar{D}$-задачи

В этом разделе построено асимптотическое при $t\to\infty$ решение $\bar{D}$ -задачи:

$$\begin{array}{c}\partial_{\bar{k}}\mu = \nu\, F(k)\exp(itS),\\ \partial_k\nu = -\mu\, F(-\bar{k})\exp(-itS);\end{array}\quad \begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}|_{|k|\to\infty} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Решение задачи (3.50) получается из решения задачи (3.53) по формуле:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(k,\xi,\eta,t) \\ \nu(k,\xi,\eta,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu(-\bar{k},\xi,\eta,t) \\ \mu(-\bar{k},\xi,\eta,t) \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Здесь построена асимптотика при $t \to \infty$, равномерная по всем переменным. При построении важную роль играют стационарные по переменным k, $\bar{k}$ точки функции $S(k,\bar{k},\xi,\eta)$.

Вне малых окрестностей стационарных точек асимптотическое разложение строится по обратным степеням параметра t. В окрестностях стационарных точек калибровочная последовательность имеет вид $t^{-n/2}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Следуя терминологии метода согласования асимптотических разложений [29], асимптотику вне малых окрестностей стационарных точек будем называть внешним разложением, асимптотики вблизи стационарных точек – внутренними разложениями. Кроме того, правая часть в системе (3.53) – разрывная функция на линии $\Re(k) = 0$, поэтому асимптотическое решение строится в классе непрерывно дифференцируемых функций всюду, кроме линии $\Re(k) = 0$.

Около каждой из двух стационарных точек существуют окрестности, в которых пригодны, как внешнее, так и внутреннее разложения. В методе согласования этот факт используется для однозначного определения коэффициентов внутреннего разложения.

Фазовая функция S зависит от двух управляющих параметров $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. На кривой $12\xi + \eta^2 = 0$ происходит вырождение стационарных точек функции S. В этом случае имеется единственная вырожденная стационарная точка. В ее окрестности меняется характер асимптотического разложения решения задачи (3.53). Вблизи параболы $12\xi + \eta^2 = 0$ разложение в окрестности вырожденной стационарной точки строится по степеням $t^{-n/3}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Формулы для равномерных асимптотических разложений решения задачи (3.53) громоздки и, чтобы избежать многочисленных ссылок "вперед", результаты этого параграфа сформулированы в разделе 3.3.3 для невырожденных и в 3.3.4 для вырожденной стационарной точки.

Асимптотика в невырожденном случае

Здесь построено составное асимптотическое решение задачи (3.53) в случае, когда фазовая функция S имеет только невырожденные стационарные точки $k = k_1$ и $k = k_2$. В нашем случае предполагается, что $t^{1/3}\big|\partial_k^2 S|_{k=k_{1,2}}\big| \gg 1$ при $t \to \infty$ для $\forall k \in \mathbb{C}$. Это приводит к ограничениям на значения управляющих параметров ξ и η, а именно, $t^{1/3}|12\xi + \eta^2| \gg 1$. Результат о равномерно пригодном по $k \in \mathbb{C}$ асимптотическом решении сформулирован в конце этого раздела.

Для построения составного асимптотического решения равномерно пригодного при $k \in \mathbb{C}$ необходимо построить внешнее и внутренние асимптотические решения, пригодные вне малых окрестностей k_j, $j = 1,2$ и в малых окрестностях точек k_j соответственно. Обозначим: $\theta = \sqrt{-12\xi - \eta^2}$. Тогда стационарные точки функции S выражаются через θ: $k_1 = (i\eta + \theta)/12, \quad k_2 = (i\eta - \theta)/12$.

Стационарные точки лежат вне линии разрыва

Рассмотрим случай, когда $\Re(\theta) \neq 0$, то есть стационарные точки $k_{1,2}$ лежат вне линии разрыва $\Re(k) = 0$. Сформулируем результат этого раздела о составном асимптотическом решении:

Лемма 9. *Пусть система уравнений (3.53) не имеет однородных решений, $F(k) \in C^2 \cap L_1$ при $\Re(k) \neq 0$, и управляющие параметры ξ и η удовлетворяют неравенству $t^{1/3}|\theta|^2 \gg 1$, тогда:*

при $\sqrt{t|\theta|}|k - k_{1,2}| \gg 1$ формальное асимптотическое по $mod(o(t^{-2}|\partial_k S|^{-3}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{\mu} = 1 + t^{-1} \overset{1}{\mu} (k, \xi, \eta),$$

$$\tilde{\nu} = (t^{-1} \overset{1}{\nu}_1 (k, \xi, \eta) + t^{-2} \overset{2}{\nu}_1 (k, \xi, \eta)) \exp(-itS) \; + \; t^{-1} \overset{1}{\nu}_0 (k, \xi, \eta);$$

функции $\overset{1}{\mu}$, $\overset{1}{\nu}_1$, $\overset{2}{\nu}_1$, $\overset{1}{\nu}_0$ определены в (3.63), (3.57), (3.61), (3.74);

при $|\theta|^{-1}|k - k_j| \ll 1$ формальное асимптотическое по $mod(o(t^{-1}|\theta|^{-1}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{\mu} = 1 + t^{-1} \overset{1}{M} (l_j, \xi, \eta),$$

$$\tilde{\nu} = \left(t^{-1/2} \overset{1}{N} (l_j, \xi, \eta) + t^{-1} \overset{2}{N} (l_j, \xi, \eta)\right) \exp(-itS),$$

где l_j , $j = 1, 2$, *связана с* k *формулой:*

$$l_j = \sqrt{t}\big(k - k_j\big)\sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{2} + 4(k - k_j)},$$

функции $\overset{1}{M} (l_j, \xi, \eta)$, $\overset{1}{N} (l_j, \xi, \eta)$, $\overset{2}{N} (l_j, \xi, \eta)$ *определены в (3.76), (3.71), (3.75).*

Доказательство. Перейдем к построению формальных асимптотических разложений. Будем искать внешнее разложение в виде отрезка асимптотического ряда по степеням t:

$$\mu^{ex} = 1 + t^{-1} \overset{1}{\mu} (k, \xi, \eta) + t^{-2} \overset{2}{\mu}_1 (k, \xi, \eta) \exp(itS), \tag{3.55}$$

$$\nu^{ex} = \left(t^{-1} \overset{1}{\nu}_1 (k, \xi, \eta) + t^{-2} \overset{2}{\nu} (k, \xi, \eta)\right) \exp(-itS) + \\ + t^{-1} \overset{1}{\nu}_0 (k, \xi, \eta). \tag{3.56}$$

Подставим (3.55) и (3.56) в (3.53). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t и осциллирующих и неосциллирующих слагаемых. В результате для коэффициентов разложений (3.55) и (3.56) получим формулы:

$$\overset{1}{\nu}_1 = \frac{\mathrm{sgn}(\Re(k)) f(-\bar{k})}{i\partial_k S}; \tag{3.57}$$

$$\partial_k \overset{1}{\nu}_0 (k, \xi, \eta) = 0; \tag{3.58}$$

$$\partial_{\bar{k}} \overset{1}{\mu} = \frac{-f(-\bar{k}) f(k)}{i\partial_k S}; \tag{3.59}$$

$$\overset{2}{\mu}_1 (k, \xi, \eta) = \frac{\mathrm{sgn}(\Re(k)) f(k) \overset{1}{\nu}_0 (k, \xi, \eta)}{i\partial_{\bar{k}} S}; \tag{3.60}$$

$$\overset{2}{\nu} = \frac{-1}{i\partial_k S}\left(-\mathrm{sgn}(\Re(k)) f(-\bar{k}) \overset{1}{\mu} - \partial_k \overset{1}{\nu}_1\right). \tag{3.61}$$

Функция $\overset{1}{\nu}_1$ при переходе через мнимую ось имеет скачок $-2if(k)/(\partial_k S)$. Чтобы для функции ν коэффициент асимптотики при t^{-1} был непрерывным, добавим к $\overset{1}{\nu}_1 \exp(iSt)$ аналитическую по $\bar{k}$ функцию, терпящую такой же скачок при переходе через мнимую ось в обратном направлении:

$$\overset{1}{\nu}{}_0'(\bar{k}) = \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dn \frac{f(n)}{(\bar{k} - n)\partial_n S}. \tag{3.62}$$

Функция $\overset{1}{\nu}_0'$ не полностью определяет аналитическую по $\bar{k}$ функцию $\overset{1}{\nu}_0$. В $\overset{1}{\nu}_0$ есть еще слагаемые, которые определятся из условия согласования внешнего и внутренних разложений, после построения внутренних разложений в окрестностях точек k_1 и k_2.

Исчезающее при $|k| \to \infty$ и ограниченное при $\forall k \in \mathbb{C}$ решение уравнения (3.59) дает формула Коши-Грина:

$$\overset{1}{\mu} = \frac{-1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dp \wedge d\bar{p}}{k-p} \frac{f(-\bar{p})f(p)}{i\partial_p S}. \tag{3.63}$$

Область значений k при которых пригодно внешнее разложение получается из условия $|t^{-1} \overset{1}{\nu}_1 /(t^{-2} \overset{2}{\nu})| \gg 1$. В результате прямых вычислений получим:

$$\sqrt{t|\theta|}|k - k_j| \gg 1.$$

Перейдем к построению внутреннего разложения в окрестности невырожденной стационарной точки k_j, где $j = 1, 2$. Для этого введем растянутую переменную l_j:

$$l_j = \sqrt{t}(k - k_j)\sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{2} + 4t(k - k_j)}. \tag{3.64}$$

Из формулы (3.64) следует, что при $t \to \infty$ и не слишком больших значениях $|l_j|$: $(t^{1/2}|\partial_k^2 S_j|^{3/2} \gg |l_j|)$ справедлива асимптотическая формула

$$(k - k_j) = \sqrt{\frac{2}{t\partial_k^2 S_j}} l_j - \frac{8}{t(\partial_k^2 S_j)^2} l_j^2 + \dots. \tag{3.65}$$

Перепишем систему (3.53) в переменных l_j и $\bar{l}_j$. Подставим в эту систему отрезок асимптотического ряда вида:

$$\mu^{in} = 1 + t^{-1} \overset{1}{M}_j (l_j, \xi, \eta), \tag{3.66}$$

$$\nu^{in} = (t^{-1/2} \overset{1}{N}_j (l_j, \xi, \eta) + t^{-1} \overset{2}{N}_j (l_j, \xi, \eta)) \exp(-itS). \tag{3.67}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t. В результате получим уравнения для коэффициентов разложений (3.66) и (3.67):

$$\partial_{l_j} \overset{1}{N}_j - 2il_j \overset{1}{N}_j = -\sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}} \mathrm{sgn}(\Re(k_j)) f(-\bar{k}_j); \tag{3.68}$$

$$\partial_{l_j} \overset{2}{N}_j -2il_j \overset{2}{N}_j = \operatorname{sgn}(\Re(k_j))\Bigg[\Big(\frac{16}{(\partial_k^2 S_j)^2}\, f(-\bar{k}_j) - \frac{2}{\partial_k^2 S_j}\, f_{10}(-\bar{k}_j)\Big)l_j -$$

$$-\frac{2\bar{l}_j}{|\partial_k^2 S_j|} f_{01}(-\bar{k}_j)\Bigg]; \tag{3.69}$$

$$\partial_{\bar{l}_j} \overset{1}{M}_j = -\operatorname{sgn}(\Re(k_j)) f(k_j) \overset{1}{N}_j \sqrt{\frac{2}{\partial_{\bar{k}}^2 S_j}}. \tag{3.70}$$

Построим решения уравнений (3.68)–(3.70). Во внешнем разложении функции ν нет членов порядка $t^{-1/2}$, поэтому краевое условие для $\overset{1}{N}_1$ (l_j, ξ, η) имеет вид:

$$\overset{1}{N}_j\ (l_j, \xi, \eta)|_{|l_j| \to \infty} = 0.$$

Тогда решение краевой задачи для $\overset{1}{N}_j\ (l_j, x, y)$ вычисляется по формуле:

$$\overset{1}{N}_j\ (l_j, \xi, \eta) = \operatorname{sgn}(\Re(k_j)) \frac{\sqrt{2} f(-\bar{k}_j)}{\sqrt{\partial_k^2 S_j}} \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{l_j - n}} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)); \tag{3.71}$$

Решение неоднородного уравнения для $\overset{2}{N}_j\ (l_j, \xi, \eta)$ имеет вид:

$$\overset{2}{N}{}_j^s(l_j, \xi, \eta) = \operatorname{sgn}(\Re(k_j)) \Bigg[\frac{8f(-\bar{k}_j)}{(\partial_k^2 S_j)^2} - \frac{f_{10}(-\bar{k}_j)}{\partial_k^2 S_j} -$$

$$\frac{2f_{01}(-\bar{k}_j)}{|\partial_k^2 S_j|} \exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2)) -$$

$$-\bar{l}_j \frac{2f_{01}(-\bar{k}_j)}{|\partial_k^2 S_j|} \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{l_j - n}} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2))\Bigg]. \tag{3.72}$$

Частное решение уравнения для $\overset{1}{M}_j\ (l_j, \xi, \eta)$ выражается через четырехкратный интеграл:

$$\overset{1}{M}{}_j^s = \frac{-2f(k_j) f(-\bar{k}_j)}{|\partial_{\bar{k}}^2 S_j|} J, \tag{3.73}$$

где

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \frac{\exp(i(n^2 + \bar{n}^2))}{2i\pi} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{\overline{n-m}} \exp(-i(m^2+\bar{m}^2)).$$

В главе 7 показано, как этот четырехкратный интеграл можно свести к двойному. В результате получим:

$$J = \bar{l}_j \frac{\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{l_j - n}} \exp(-i(n^2+\bar{n}^2)) \,-\, \exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2)).$$

Существует область значений комплексного параметра k, в которой пригодны как внешнее, так и внутреннее асимптотические разложения решения задачи (3.53). В этой области асимптотические решения должны совпадать с точностью $o(t^{-1})$. В области $t^{1/2}|k-k_j| \gg 1$ и $|k-k_j| \leq t^{-1/4}$ пригодны как внешнее, так и внутреннее разложения. Для согласования этих разложений необходимы асимптотики внешнего разложения при $k \to k_j$ и внутреннего разложения при $|l_j| \to \infty$.

Приведем асимптотики функций $\overset{1}{N}_j$ и $\overset{2}{N}_j{}^s$ при $|l_j| \to \infty$:

$$\overset{1}{N}_j \,|_{|l_j|\to\infty} = -\operatorname{sgn}(\Re(k_j))\sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}} f(-\bar{k}_j) \left(\frac{1}{2il_j} + \frac{\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))}{\bar{l}_j} + \right.$$
$$\left. + O(|l_j|^{-3}) \right).$$

$$\overset{2}{N}_j \,(l_j,\xi,\eta)|_{|l_j|\to\infty} = \operatorname{sgn}(\Re(k_j)) \left[\left(\frac{8if(-\bar{k}_j)}{(\partial_k^2 S_j)^2} - \frac{if_{10}(-\bar{k}_j)}{\partial_k^2 S_j} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{l}_j}{2il_j} \frac{-2f_{01}(-\bar{k}_j)}{|\partial_{\bar{k}}^2 S_j|} + O(|l_j|^{-1}) \right].$$

Условие согласования для $\tilde{\nu}$ в области $t^{1/3}|k-k_j| \gg 1$ и $|k-k_j| = o(1)$ означает, что:

$$\left(t^{-1/2} \,\overset{1}{N}_j \,(l_j,\xi,\eta) + t^{-1} \,\overset{2}{N}_j \,(l_j,\xi,\eta) \right) \exp(-itS) -$$
$$-t^{-1} \left(\overset{1}{\nu}_1 \,(k,\xi,\eta) \exp(-itS) + \overset{1}{\nu}_0 \,(k,\xi,\eta) \right) \;=\; o(t^{-1}).$$

Сравнивая асимптотики внутренних разложений, переписанных в терминах внешней переменной k при $k \to k_{1,2}$ и внешнего разложения, получим выражение для $\overset{1}{\nu}_0$ и $\overset{2}{N}_j$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\nu}_0 \,(k,x,y) \;\; &= \overset{1}{\nu'}_0(\bar{k}) \,+\, \tfrac{2f(-\bar{k}_1)\exp(itS_1)}{|\partial_k^2 S_1| \overline{(k-k_1)}} \,+ \\ &+ \tfrac{-2f(-\bar{k}_2)\exp(itS_2)}{|\partial_k^2 S_2| \overline{(k-k_2)}}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

где функция $\overset{1}{\nu}{}'_0(\bar{k})$ определена в (3.62);

$$\overset{2}{N}_j = \overset{2}{N}_j{}^s + \overset{1}{\nu}{}'_0(k_j)\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))\exp(itS_j) + \\ + \frac{2\mathrm{sgn}(\Re(k_m))f(-\bar{k}_m)\exp(itS_m)}{|\partial_k^2 S_m|\overline{(k_j-k_m)}}\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2)), \tag{3.75}$$

где $m \neq j$, функция $\overset{2}{N}_j{}^s$ определена в (3.72).

Перейдем к построению $\overset{1}{M}_j\ (l_j,\xi,\eta)$. Асимптотика (3.73) при $|l_j| \to \infty$ имеет вид:

$$\overset{1}{M}_j{}^s|_{|l_j|\to\infty} = \frac{\bar{l}_j}{l_j}\sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{\partial_{\bar{k}}^2 S_j}}\frac{i}{12\pi}\frac{f(-\bar{k}_j)f(k_j)}{\partial_k^2 S}.$$

Вычислим асимптотику $\overset{1}{\mu}_0$ при $k \to k_j$:

$$\overset{1}{\mu}_0\ |_{k\to k_j} = \frac{\overline{(k-k_j)}}{k-k_j}\frac{f(-\bar{k}_j)f(k_j)}{12i(k_j-k_n)} - \frac{f(k_j)f(-\bar{k}_j)}{12i(k_j-k_n)} + \\ + \frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} dp\wedge d\bar{p}\frac{f(-\bar{p})f(p)-f(k_j)f(-\bar{k}_j)}{12i(p-k_j)^2(p-k_n)},$$

здесь $n \in 1,2,\ n \neq j$.

Условие согласования для $\tilde{\mu}$ в области $t^{-1/3}|k-k_j| \gg 1$ и $|k-k_j| = o(t^{-1/4})$ имеет вид:

$$(1+t^{-1}\ \overset{1}{\mu}_0\ (k,\xi,\eta)) - (1+t^{-1}\ \overset{1}{M}_j\ (l_j,\xi,\eta)) = o(t^{-1}).$$

Из этого условия окончательно определяется $\overset{1}{M}_j\ (l_j,\xi,\eta)$:

$$\overset{1}{M}_j\ (l_j,\xi,\eta) = \overset{1}{M}_j{}^s(l_j,\xi,\eta) + C_j(\xi,\eta). \tag{3.76}$$

Здесь функция $\overset{1}{M}_j{}^s(l_j,\xi,\eta)$ определена в формуле (3.73), $C_j(\xi,\eta)$ имеет вид:

$$C_j(\xi,\eta) = -\frac{f(k_j)f(-\bar{k}_j)}{12i(k_j-k_n)} + \\ + \frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} dp\wedge d\bar{p}\frac{f(-\bar{p})f(p)-f(k_j)f(-\bar{k}_j)}{12i(p-k_j)^2(p-k_n)}, \tag{3.77}$$

где $n \in 1,2,\ n \neq j$.

Таким образом, построено внутреннее разложение в окрестности невырожденной стационарной точки при $|12\xi + \eta^2| \geq t^{-1/4}$.

Лемма доказана.

Построенные асимптотические решения не являются равномерными по k: в зависимости от рассматриваемой области значений комплексного параметра k необходимо пользоваться внешним или одним из внутренних разложений. Области определения внешнего и внутренних разложений пересекаются. Следуя методу согласования асимптотических разложений [29] равномерно пригодное разложение можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{N}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{M}_2 \\ \tilde{N}_2 \end{pmatrix} -$$

$$-A_{1,k} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{N}_1 \end{pmatrix} - A_{1,k} \begin{pmatrix} \tilde{M}_2 \\ \tilde{N}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Результат действия оператора $A_{n,k}$ на функцию $\tilde{M}$ определяется следующим образом [29]. Возьмем формулу для $\tilde{M}(l_j, \xi, \eta, t)$, заменим в ней зависимость от l_j зависимостью от k, исходя из формулы (3.64). Затем выпишем сумму всех членов асимптотического разложения по t со степенями $-m$, где $0 \leq m \leq n$. В частности, для функций $\tilde{M}(l_1, \xi, \eta, t)$ и $\tilde{N}(l_1, \xi, \eta, t)$ эта процедура приводит к формулам:

$$A_{1,k}(\tilde{M}_1) = 1 + t^{-1} \frac{\overline{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}}}{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} \frac{f(-\bar{k}_1) f(k_1)}{2|\partial_k^2 S_1|};$$

$$A_{1,k}(\tilde{N}_1) = t^{-1} \Bigg[\frac{f(-\bar{k}_1)}{2i\theta\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} -$$

$$- \frac{f(-\bar{k}_1) \exp(-it(S - S_1))}{|\theta| \overline{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}}} +$$

$$+ \overset{1}{\nu_0'} - \frac{f_{01}(-\bar{k}_1)}{|\theta|} \frac{\overline{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}}}{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} \Bigg].$$

Если подставить (3.78) в (3.53) и посчитать невязку, получим следующее утверждение:

Теорема 12. *Формальное асимптотическое решение задачи (3.53) по $mod\big(o\big((t|\theta|)^{-1}\big)\big)$ равномерно пригодное при $k \in \mathbb{C}$ и $\theta^2 t \gg 1$ имеет вид (3.78).*

Стационарные точки лежат на линии разрыва

Если $\Re(\theta) = 0$, тогда стационарные точки фазовой функции S лежат на линии разрыва коэффициента в уравнении (3.53). В этом случае построение формальной асимптотики решения задачи (3.53) отлично от построенного выше. Основной результат о составном решении дает следующее утверждение:

Лемма 10. *Пусть система уравнений (3.53) не имеет однородных решений, $F(k) \in C^2 \cap L_1$ при $\Re(k) \neq 0$ и управляющие параметры ξ и η удовлетворяют неравенству $-t^{2/3}(12\xi + \eta^2) \gg 1$, тогда:*
при $\sqrt{t|\theta|}|k - k_{1,2}| \gg 1$ формальное асимптотическое по $mod(o(t^{-2}|\partial_k S|^{-3}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{\mu} = 1 + t^{-1} \overset{1}{\alpha} (k, \xi, \eta),$$

$$\tilde{\nu} = (t^{-1} \overset{1}{\beta}_1 (k, \xi, \eta) + t^{-2} \overset{2}{\beta}_1 (k, \xi, \eta)) \exp(-itS) \ + \ t^{-1} \overset{1}{\beta}_0 (k, \xi, \eta);$$

функции $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{1}{\beta}_1$, $\overset{2}{\beta}_1$, $\overset{1}{\beta}_0$ определены в (3.81), (3.82), (3.85), (3.91);
при $|\theta|\,|k - k_j| \ll 1$ формальное асимптотическое по $mod(o(t^{-1}|\theta|^{-1}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{Y} = 1 + t^{-1} \overset{1}{Y} (l_j, \xi, \eta),$$

$$\tilde{Z} = \big(t^{-1/2} \overset{1}{Z} (l_j, \xi, \eta) + t^{-1} \overset{2}{Z} (l_j, \xi, \eta)\big) \exp(-itS),$$

где функции $\overset{1}{Y} (l_j, \xi, \eta)$, $\overset{1}{Z} (l_j, \xi, \eta)$, $\overset{2}{Z} (l_j, \xi, \eta)$ определены в (3.93), (3.92).

Доказательство. Перейдем к построению асимптотики. Внешнее разложение строится аналогично пункту 3.3.3. Отличие состоит в том, что стационарные точки функции S лежат на линии разрыва. Это приводит к существенным изменениям в формулах для коэффициентов асимптотики. Будем искать внешнее разложение в виде отрезка асимптотического ряда по степеням t:

$$\mu^{ex} = 1 + t^{-1} \overset{1}{\alpha} (k, \xi, \eta) + t^{-2} \overset{2}{\alpha}_1 (t, \xi, \eta) \exp(itS), \tag{3.79}$$

$$\nu^{ex} = t^{-1}(\overset{1}{\beta}(k,\xi,\eta)\exp(-itS) + \overset{1}{\beta}_0(k,\xi,\eta)) + t^{-2}\overset{2}{\beta}\exp(-itS). \qquad (3.80)$$

После подстановки (3.79), (3.80) в систему (3.53) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t и при осциллирующих и неосциллирующих слагаемых соответственно. В результате для коэффициентов разложений (3.79) и (3.80) получаются те же уравнения, что и для коэффициентов разложений (3.55), (3.56). Выпишем явные формулы:

$$\overset{1}{\alpha} = \frac{-1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{k-n}\frac{f(-\bar{n})f(n)}{i\partial_n S(n,\xi,\eta)}, \qquad (3.81)$$

$$\overset{1}{\beta}_1 = \frac{\mathrm{sgn}(\Re(k))f(-\bar{k})}{i\partial_k S}. \qquad (3.82)$$

Функция $\overset{1}{\beta}_1$ разрывна на мнимой оси. Для того, чтобы коэффициент асимптотического разложения (3.80) при t^{-1} был непрерывным добавим аналитическую по k функцию, имеющую такой скачок, на мнимой оси при ее переходе в обратном направлении:

$$\overset{1}{\beta}{}'_0 = \frac{1}{\pi i\partial_{\bar{k}}S}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dnf(n)\partial_{\bar{n}}S}{(\bar{k}-n)\partial_n S} = \frac{1}{\pi i\partial_{\bar{k}}S}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dnf(n)}{\bar{k}-n}. \qquad (3.83)$$

В отличие от $\overset{1}{\nu}{}'_0$ эта функция имеет особенности на линии разрыва.

Формулы для остальных коэффициентов разложений (3.79), (3.80) имеют вид:

$$\overset{2}{\alpha}_1 = \frac{\mathrm{sgn}(\Re(k))f(k)\overset{1}{\beta}_0(k,\xi,\eta)}{i\partial_{\bar{k}}S}, \qquad (3.84)$$

$$\overset{2}{\beta} = \frac{-1}{i\partial_k S}\left(-\mathrm{sgn}(\Re(k)f(-\bar{k})\overset{1}{\alpha} - \partial_k\overset{1}{\beta}_1\right). \qquad (3.85)$$

Здесь аналитическая функция $\overset{1}{\beta}_0$ еще не определена. Она будет найдена после согласования внутреннего и внешнего разложений.

Внутреннее разложение в окрестности точки k_j зависит от растянутой переменной l_j. Асимптотики функций μ и ν имеют ту же структуру по

t, однако, уравнения для $\overset{1}{Z}_j$, $\overset{2}{Z}_j$ и $\overset{1}{Y}_j$ имеют разрывные правые части.

$$\partial_{l_j} \overset{1}{Z}_j - 2il_j \overset{1}{Z}_j = \sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}} f(-\bar{k}_j) \mathrm{sgn}(\Re(\bar{l}\exp(i\pi/4))); \qquad (3.86)$$

$$\partial_{l_j} \overset{2}{Z}_j - 2il_j \overset{2}{Z}_j = \mathrm{sgn}(\Re[\bar{l}\exp(i\pi/4)]) \times$$
$$\times \Big(\frac{16}{(\partial_k^2 S_j)^2} f_{00}(-\bar{k}_j) + \frac{2l_j}{\partial_k^2 S_j} f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_j) + \frac{2i\bar{l}_j}{|\partial_k^2 S_j|} f_{10}^{(1)}(-\bar{k}_j) \Big) +$$
$$+ \frac{2l_j}{\partial_k^2 S_j} f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_j) + \frac{2i\bar{l}_j}{|\partial_k^2 S_j|} f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_j). \qquad (3.87)$$

$$\partial_{\bar{l}_j} \overset{1}{Y}_j = \mathrm{sgn}(\Re(l\exp(-i\pi/4))) f(k_j) \overset{1}{Z}_j \sqrt{\frac{2}{\partial_{\bar{k}}^2 S_j}}. \qquad (3.88)$$

Непрерывные на линии разрыва правой части частные решения уравнений (3.86), (3.87) и (3.88) получаются с помощью формулы Коши-Римана. Формулы для частных решений уравнений (3.86) и (3.87) отличаются от полученных в п.3.3.3 наличием функции sgn под знаком двойного интеграла:

$$\overset{1}{Z}{}_j^s = \mathcal{J}[\overset{1}{H}_j](l_j), \quad \overset{2}{Z}{}_j^s = \mathcal{J}[\overset{2}{H}_j](l_j), \qquad (3.89)$$

где $\overset{1}{H}_j$ и $\overset{2}{H}_j$ – правые части в уравнениях (3.86), (3.87). Оператор $\mathcal{J}$ имеет вид:

$$\mathcal{J}[h](l_j) = \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{l_j - n}} h(n) \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)).$$

В выражении для частного решения уравнения (3.88) кроме двойного интеграла как в (3.73) имеется слагаемое, определяющееся интегралом по линии разрыва. Функция $\overset{1}{Y}{}_j^s$ имеет вид:

$$\overset{1}{Y}{}_j^s = \frac{2f(k_j)f(-\bar{k}_j)}{|\partial_{\bar{k}}^2 S_j|} \big(J - 2J_{+-} - 2J_{-+}\big), \qquad (3.90)$$

где:

$$J_{\mp\pm} = \int\int_{\Omega^{\mp}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{l - m} \frac{\exp(i(m^2 + \bar{m}^2))}{2i\pi} \times$$
$$\times \int\int_{\Omega^{\pm}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{n - m}} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)).$$

Здесь $\Omega^{\pm} = \{\pm\Re[l\exp(-i\pi/4) > 0\}$. Заметим, что $J_{-+}(l) = J_{+-}(-l)$. В главе 7 показано, как интеграл J_{-+} сводится к двукратному. Приведем окончательный результат:

$$J_{-+} = -\frac{3}{4}i\pi + il\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{il-\bar{m}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2)), \quad \text{при} \quad l\in\Omega^+;$$

$$J_{-+} = \bar{l}\exp(i(l^2+\bar{l}^2))\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{il-\bar{m}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2)) -$$
$$-\frac{1}{4}i\pi - \frac{1}{2}i\pi\exp(i(l^2+\bar{l}^2)), \quad \text{при} \quad l\in\Omega^-;$$

Таким образом, функция $\overset{1}{Y}{}_j^s$ выражается через сумму двойных интегралов.

Перейдем к согласованию внешнего и внутреннего асимптотических разложений. Для этого необходимы асимптотики по l при $|l|\to\infty$ частных решений уравнений (3.86),(3.87). Асимптотики двукратных интегралов, встречающихся в формулах для этих решений вычислены в разделе 7.1. Воспользовавшись ими получим:

$$\overset{1}{Z}{}_j^s|_{|l|\to\infty} = \operatorname{sgn}\big[\Re[-\bar{l}_j\exp(i\pi/4)]\big]f(-\bar{k}_j)\sqrt{\frac{2}{\partial_k^2S_j}}\bigg(\frac{-1}{2il_j} +$$
$$+\frac{\exp(-i(l_j^2+\bar{l}_j^2))}{2\bar{l}_j} + O(|l_j|^{-2})\bigg);$$

$$\overset{2}{Z}{}_j^s|_{|l_j|\to\infty} = \operatorname{sgn}\big[\Re[-\bar{l}_j\exp(i\pi/4)]\big] \times$$
$$\times\Bigg[\bigg(\frac{-\bar{l}_j}{2il_j} - \frac{1}{2}\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))\bigg)\frac{2if_{10}^{(1)}}{|\partial_k^2S_j|^2} +$$
$$+\bigg(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))\bigg)2f_{01}^{(1)}\Bigg] +$$
$$+\frac{2if_{10}^{(2)}}{|\partial_k^2S_j|}\bigg(\frac{\bar{l}_j}{-2il} + \frac{1}{2}\exp(i(l_j^2+\bar{l}_j^2))\bigg) + if_{01}^{(2)} + O(|l_j|^{-1}).$$

Асимптотика функции $\overset{1}{\beta}{}_0''$:

$$\overset{1}{\beta}{}_0''|_{k\to k_j} = \frac{1}{12i\overline{(k-k_j)(k_j-k_m)}}\Bigg[f(k_j)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dn\frac{f(in)-f(k_j)}{n-\overline{ik_j}}\Bigg] + \frac{-1}{12i(k_j-k_m)^2}\Bigg[f(k_j)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dn\frac{f(in)-f(k_j)}{n-\overline{ik_j}}\Bigg] + \frac{1}{12i\overline{(k_j-k_m)}}\Bigg[f_{01}^{(1)}(k_j) +$$

$$+f_{01}^{(2)}(k_j)\mathrm{sgn}[\Im(\overline{ik})] + f_{10}^{(1)}(k_j) + f_{10}^{(2)}(k_j)\mathrm{sgn}[\Im(\overline{ik})] +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dn\frac{f(in)-f(k_j)-\overline{(in-ik_j)}f_{01}^{(2)}(k_j)-(in-ik_j)f_{10}^{(2)}(k_j)}{(n-\overline{ik_j})^2}\Bigg]$$

$$+o(1).$$

Из условий согласования асимптотик внешнего разложения ν^{ex} и внутреннего разложения ν^{in} окончательно определяются:

$$\overset{1}{\beta}{}_0 = \overset{1}{\beta}{}'_0 - \frac{C_1^1}{12i\overline{(k-k_1)(k_1-k_2)}} - \frac{C_2^1}{12i\overline{(k-k_2)(k_2-k_1)}}, \tag{3.91}$$

где $\overset{1}{\beta}{}_0'$ определена в формуле (3.83),

$$C_j^1 = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dn\frac{f(-n)-f(-k_j)}{n-\overline{ik_j}}, \quad j=1,2;$$

$$\overset{1}{Z}_j = \overset{1}{Z}{}_j^s \qquad \overset{2}{Z}_j = \overset{2}{Z}{}_j^s - \exp(-i(l_j^2+\bar{l}_j^2))C_j^2, \tag{3.92}$$

где функции $\overset{1}{Z}{}_j^s$ и $\overset{2}{Z}{}_j^s$ определены в (3.89),

$$C_j^1 = \frac{i}{\partial_k^2 S_j} f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_j) -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dn\frac{f(n)-f(-\bar{k}_j)-f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_j)\overline{(n-ik_j)}-(n-ik_j)f_{10}^{(2)}(k_j)}{(n-\overline{ik_j})^2}.$$

Асимптотика функции $\overset{1}{Y}{}_j^s$:

$$\overset{1}{Y}{}_j^s = \left(-i\pi + \frac{i\bar{l}_j}{12\pi l_j}\right)\frac{f(-\bar{k}_j)f(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|}.$$

Тогда условие согласования асимптотик внешнего и внутреннего разложений для μ^{ex} и μ^{in} дает:

$$\overset{1}{Y}_j = \overset{1}{Y}{}_j^s + C_j(\xi,\eta) + i\pi\frac{f(-\bar{k}_j)f(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|}, \tag{3.93}$$

где $\overset{1}{Y}{}_j^{\,s}$ определена в (3.90), функция $C_j(\xi,\eta)$ определена в формуле (3.77).

Лемма доказана.

Построенные внутреннее и внешнее разложения неравномерны по параметрам k,ξ,η. Равномерное по k разложение при $(12\xi+\eta^2)t^{1/3}\gg 1$ строится аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте

$$\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\nu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{\mu}\\ \tilde{\nu}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tilde{Y}_1\\ \tilde{Z}_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tilde{Y}_2\\ \tilde{Z}_2\end{pmatrix} - A_{1,k}\begin{pmatrix}\tilde{Y}_1\\ \tilde{Z}_1\end{pmatrix} - A_{1,k}\begin{pmatrix}\tilde{Y}_2\\ \tilde{Z}_2\end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Оператор $A_{n,k}$ определен выше. Подставим (3.94) в (3.53) и посчитаем невязку. В результате получим

Теорема 13. *Формальное асимптотическое решение задачи (3.53) по* $mod\big(o\big((t|\theta|)^{-1}\big)\big)$ *равномерно пригодное при* $k\in\mathbb{C}$ *и* $-\theta^2t^{2/3}\gg 1$ *имеет вид (3.94).*

3.3.4 Асимптотика в окрестности вырожденной стационарной точки

Система уравнений в задаче (3.53) зависит от двух управляющих параметров ξ и η. На параболе $12\xi+\eta^2=0$ происходит вырождение стационарных точек: $k_1=k_2=k_0=i\eta$. Это приводит к тому, что асимптотики, построенные в п.3.3.3 непригодны, когда параметр $\theta=\sqrt{\eta^2+12\xi}$ близок к нулю. В частности, асимптотика при $k\to k_0$ коэффициента $\overset{1}{\mu}$ внешнего разложения при $\theta\to 0$ имеет разрывный характер:

$$\Big[\overset{1}{\mu}\,|_{k\to k_0}\Big]|_{\theta\to 0} =$$
$$= \left(\frac{|k-k_0|}{12i((k-k_0)^2-\theta^2)} - \frac{\bar{\theta}}{\theta}\frac{k-k_0}{12i((k-k_0)^2-\theta^2)}\right)f(-\bar{k}_0)f(k_0) + o(1).$$

Это является указанием на то, что здесь необходимо растягивать параметр θ. Растянутый управляющий параметр в этом разделе определяется формулой:

$$v = t^{1/3}\,\frac{\theta}{\sqrt{12}}.$$

Если внешнее разложение, построенное в п. 3.3.3, вблизи $\theta = 0$ становится разрывным, то внутреннее разложение из п. 3.3.3 в точке $\theta = 0$ имеет особенность и теряет свой асимптотический характер. Поэтому здесь изменяется и характерная переменная для внутренней асимптотики:

$$p = t^{1/3}(k - k_0). \tag{3.95}$$

В случае значений управляющего параметра θ близких к нулю следует строить заново внешнее и внутреннее разложения.

В этом разделе построено составное формальное асимптотическое решение задачи (3.53) по $\mathrm{mod}(o(t^{-1}))$ при $|\theta| \ll 1$ и равномерное по $k \in \mathbb{C}$. Результат о составном решении сформулирован в конце раздела.

Для построения составного решения потребуются внешнее и внутреннее асимптотические разложения решения пригодные вне малой окрестности точки k_0 и в малой окрестности этой точки. Сформулируем результат о внешнем и внутреннем разложениях.

Лемма 11. *Пусть система уравнений (3.53) не имеет однородных решений, $F(k) \in C^2 \cap L_1$ и параметры ξ и η удовлетворяют неравенству $|12\xi + \eta^2| \ll 1$ тогда:*
при $|k - k_0|t^{1/3} \gg 1$ формальное асимптотическое по mod$(o(t^{-2/3}/|k - k_0|) + o(t^{-1}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{\mu} = 1 \,+\, t^{-1} \overset{1}{m} (k, \xi, \eta),$$

$$\tilde{\nu} = t^{-2/3} \overset{1}{n}_0 + t^{-1}\left(\overset{1}{n}_1 \exp(itS) + \overset{2}{n}_0 \right)$$

функция $\overset{1}{m}$ определена в (3.122), функции $\overset{1}{n}_0$ и $\overset{2}{n}_2$ определяются формулами (3.118) и (3.119), функция $\overset{1}{n}_1$ – формулой (3.110);
при $|k - k_0| \ll 1$ асимптотическое по mod$(o(t^{-2/3}|k - k_0| + o(t^{-1}))$ решение системы (3.53) имеет вид:

$$\tilde{\mu} = 1 + t^{-2/3} \overset{1}{\mathcal{M}} + t^{-1} \overset{2}{\mathcal{M}},$$

$$\tilde{\nu} = (t^{-1/3} \overset{1}{\mathcal{N}} + t^{-2/3} \overset{2}{\mathcal{N}} + t^{-1} \overset{3}{\mathcal{N}}) \exp(-itS);$$

функции $\overset{j}{\mathcal{M}}$, $j = 1, 2$ *и* $\overset{j}{\mathcal{N}}$, $j = 1, 2, 3$ *определены в (3.121), и (3.120).*

Доказательство леммы. Будем искать внутренне формальное асимптотическое решение системы (3.53) в виде отрезка асимптотического ряда:

$$\mathcal{M}^{in} = 1 + t^{-2/3} \overset{1}{\mathcal{M}} + t^{-1} \overset{2}{\mathcal{M}}, \tag{3.96}$$

$$\mathcal{N}^{in} = (t^{-1/3} \overset{1}{\mathcal{N}} + t^{-2/3} \overset{2}{\mathcal{N}} + t^{-1} \overset{3}{\mathcal{N}}) \exp(-itS). \tag{3.97}$$

В системе (3.53) перейдем от переменной k к переменной p. Фазовая функция экспоненты связана с переменной p формулой:

$$tS \equiv \omega(p) \equiv 4(p^3 + \bar{p}^3) - v^2(p + \bar{p}),$$

где $v = t^{1/3}\theta/\sqrt{12}$. Подставим (3.96) и (3.97) в систему (3.53), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t. В результате получим последовательность уравнений для коэффициентов разложений (3.96) и (3.97).

$$\partial_p \overset{1}{\mathcal{N}} - i(12p^2 - v^2) \overset{1}{\mathcal{N}} = \operatorname{sgn}[\Re(-\bar{p})] f(-\bar{k}_0), \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}\partial_p \overset{2}{\mathcal{N}} - i(12p^2 - v^2) \overset{2}{\mathcal{N}} = -\operatorname{sgn}[-\Re(\bar{p})]\big(f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0)\bar{p} + {}\\ + f_{10}^{(1)}(-\bar{k})p\big) - f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0)\bar{p} - f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_0)p.\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\partial_{\bar{p}} \overset{1}{\mathcal{M}} = \operatorname{sgn}[-\Re(\bar{p})] f(k_0) \overset{1}{\mathcal{N}}, \tag{3.100}$$

$$\partial_p \overset{3}{\mathcal{N}} - i(12p^2 - v^2) \overset{3}{\mathcal{N}} = \tag{3.101}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\big[-\Re(-\bar{p})\big] f_{20}^{(1)}(-\bar{k}_0) + f_{20}^{(2)}(-\bar{k}_0)\right] p^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\big[-\Re(-\bar{p})\big] f_{02}^{(1)}(-\bar{k}_0) + f_{02}^{(2)}(-\bar{k}_0)\right] \bar{p}^2 -$$

$$-\left[\operatorname{sgn}\big[-\Re(\bar{p})\big] f_{11}^{(1)}(-\bar{k}_0) + f_{11}^{(2)}(-\bar{k}_0)\right] |p|^2 -$$

$$-\operatorname{sgn}\big[-\Re(-\bar{p})\big] f(-\bar{k}_0) \overset{1}{\mathcal{M}} . \tag{3.102}$$

$$\partial_{\bar{p}} \overset{2}{\mathcal{M}} = \operatorname{sgn}\big[\Re(p)\big] f(k_0) \overset{2}{\mathcal{N}} + \tag{3.103}$$

$$+\left[\operatorname{sgn}\big[-\Re(\bar{p})\big] f_{10}^{(1)}(k_0) + f_{10}^{(2)}(k_0)\right] \overset{1}{\mathcal{N}} p +$$

$$+\left[\operatorname{sgn}[-\Re(k)] f_{01}^{(1)}(k_0) + f_{01}^{(2)}(k_0)\right] \overset{1}{\mathcal{N}} \bar{p}. \tag{3.104}$$

Эти уравнения получены в предположении, что $|p|t^{-1/3} \ll 1$. Равномерно ограниченные частные решения уравнений для коэффициентов разложения (3.97) получаются применением к правой части $g(p)$ соответствующего уравнения интегрального оператора:

$$\mathcal{P}[g] = \frac{\exp(i\omega(p))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\overline{\overline{p - r}}} \exp(-i\omega(r))\, g(r). \tag{3.105}$$

Таким образом, ограниченные частные решения уравнений (3.98) и (3.99) – функции $\overset{1}{\mathcal{N}}{}^s$ и $\overset{2}{\mathcal{N}}{}^s$ – представляются через двукратные интегралы.

Ограниченные частные решения уравнений для коэффициентов разложения (3.96) строятся с помощью формулы Коши-Грина.

Формула для частного решения уравнения (3.100) имеет вид:

$$\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s(p, \xi, \eta) = f(k_0) f(-\bar{k}_0)\big(J_1(p, v^2) - 2J_1^{-+} - 2J_1^{+-}\big). \tag{3.106}$$

Здесь

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p - n} \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\overline{\overline{n - r}}} \exp(-i\omega(r)).$$

и

$$J_1^{\mp\pm} = \frac{1}{2i\pi} \int\int_{\Omega^{\mp}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p - n} \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \int\int_{\Omega^{\pm}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\overline{\overline{n - r}}} \exp(-i\omega(r)).$$

В части 7 интегралы J_1 и J_1^{-+} сведены к двойным интегралам. Аналогично можно представить через сумму двойных интегралов и J_1^{+-}. Поэтому $\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s$ тоже может быть выражена через двукратные интегралы. Это выражение очень громоздко и здесь не приводится. Мы им воспользуемся ниже при вычислении асимптотики $\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s$ при $|p| \to \infty$.

Ограниченное при $p \in \mathbb{C}$ частное решение уравнения (3.104) можно построить аналогично. Для $\overset{2}{\mathcal{M}}$ приведем следующее утверждение.

Лемма 12. *Непрерывное частное решение уравнения для $\overset{2}{\mathcal{M}}$ существует и равномерно ограничено при $p \in \mathbb{C}$.*

Схема доказательства. Частное решение уравнения для $\overset{2}{\mathcal{M}}$ получается в результате применения оператора

$$\partial_{\bar{p}}^{-1}\big[g\big] = \overset{2}{\mathcal{M}}{}^s \equiv \frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n} g(n) \tag{3.107}$$

к правой части уравнения. Получающиеся в результате этого интегралы непрерывны в силу непрерывности интегрального оператора по параметру p. Ограниченность этих интегралов равномерно по параметру p при $p \in \mathbb{C}$ можно показать, исходя из асимптотик при $|p| \to \infty$ слагаемых из правой части уравнения для $\overset{2}{\mathcal{M}}$.

Перейдем к построению внешнего разложения. Будем искать его в виде:

$$m = 1 + t^{-1}\overset{1}{m}_0(k,v) + t^{-5/3}(\overset{2}{m}_1\exp(itS) + \overset{2}{m}_0) + \ldots; \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned} n &= (t^{-1}\overset{1}{n}_1(k,v) + t^{-5/3}\overset{2}{n}_1(k,v) + t^{-2}\overset{3}{n}_1\ldots)\exp(itS) \\ &\quad + t^{-2/3}\overset{1}{n}_0(k,v) + t^{-1}\overset{2}{n}_0(k,v) + \ldots. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Подставим (3.108) и (3.109) в (3.53). Действуя так же, как в п.3.3.3 получим:

$$\overset{1}{n}_1 = \mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{k})\big]\frac{f(-\bar{k})}{12i(k-k_0)^2}; \quad \overset{2}{n}_1 = -\mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{k})\big]\frac{v^2 f(-\bar{k})}{144i(k-k_0)^4}; \tag{3.110}$$

$$\partial_{\bar{k}}\overset{1}{m} = \frac{f(k)f(-\bar{k})}{12i(k-k_0)^2}; \tag{3.111}$$

$$\partial_k \overset{1}{n}_0 (k,\xi,\eta) = 0; \quad \partial_k \overset{2}{n}_0 (k,\xi,\eta) = 0; \tag{3.112}$$

$$\partial_{\bar{k}} \overset{2}{m}_0 = \frac{f(k)f(-\bar{k})v^2}{144i(k-k_0)^4}; \quad \overset{2}{m}_1 (k,\xi,\eta) = \mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{k})\big] f(k) \frac{\overset{1}{n}_0 (k,\xi,\eta)}{12i\overline{(k-k_)})^2}; \tag{3.113}$$

$$\overset{3}{n}_1 (k,\xi,\eta) = \frac{1}{12i(k-k_0)^2}\Bigg(\mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{k})\big] f(-\bar{k}) \overset{1}{m}_0$$
$$+\frac{2f(-\bar{k})}{12i(k-k_0)^3}\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] - \frac{f_{10}^{(1)}(-\bar{k})\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] + f_{10}^{(2)}(-\bar{k})}{12i(k-k_0)^2}\Bigg). \tag{3.114}$$

Формулы (3.110) и (3.114) полностью определяют $\overset{1}{n}_1$, $\overset{2}{n}_1$ и $\overset{3}{n}_1$. Из формул (3.112) следует, что функции $\overset{1}{n}_0$ $\overset{2}{n}_0$ аналитически зависят от переменной $\bar{k}$. Явный вид этой зависимости определяется из двух условий. Во-первых, – из условия непрерывности асимптотики, во-вторых, – из условия согласования внешнего и внутреннего асимптотических разложений.

Можно показать, что для непрерывности по k коэффициента асимптотики (3.109) при t^{-1} достаточно, чтобы в $\overset{2}{n}_0$ содержалось слагаемое:

$$\overset{2}{n}{}_0' = \frac{1}{\pi i}\frac{1}{12i\overline{(k-k_0)}^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\lambda}{\overline{k-\lambda}}f(-\bar{l}). \tag{3.115}$$

Из формул (3.113) следует, что коэффициент асимптотики (3.108) при $t^{-5/3}$ определяется после вычисления $\overset{1}{n}_0$, т.е. после согласования коэффициентов внешнего и внутреннего разложений при $t^{-2/3}$.

Рассмотрим подробнее задачу для $\overset{1}{m}$. В дополнение к уравнению (3.111) функция $\overset{1}{m}$ должна удовлетворять краевому условию:

$$\overset{1}{m}_0 \mid_{|k|\to\infty} = 0.$$

Внешнее решение пригодно вне малых окрестностей точек k_j, $j = 0,1,2$. Поэтому убывающее при $|k| \to \infty$, всюду гладкое, ограниченное решение уравнения (3.111):

$$\overset{1}{m}{}_0^s(k,\theta) = \frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dr\wedge d\bar{r}}{k-r}\frac{f(-\bar{r})f(r) - f(-\bar{k}_0)f(k_0)}{12i(r-k_0)^2} +$$
$$+\frac{\overline{(k-k_0)}f(k_0)f(-\bar{k}_0)}{12i(k-k_0)^2} \tag{3.116}$$

определено с точностью до аналитической функции переменной k, имеющей особенность при $t^{1/3}|k-k_0| \ll 1$. Полностью $\overset{1}{m}_0$ определяется при согласовании внутреннего и внешнего разложений.

Для согласования асимптотических разложений в окрестности вырожденной стационарной точки k_0 необходимы асимптотики частных решений уравнений (3.98)-(3.102) при $|p| \to \infty$. Построение этих асимптотик сводится к вычислению асимптотик кратных интегралов со слабой особенностью подынтегральной функции. Эти вычисления проведены в главе 7. Основываясь на них, приведем асимптотики частных решений уравнений (3.98)-(3.102) при $|p| \to \infty$.

$$\overset{1}{\mathcal{N}}{}^s(p,\xi,\eta) = \frac{1}{\bar{p}}\exp(i\omega(p))f(-\bar{k}_0)\big[\phi_{00}^+(v^2) - \phi_{00}^-(v^2)\big] + \\ +\frac{1}{\bar{p}^2}\exp(i\omega(p))f(-\bar{k})\big[\phi_{01}^+(v^2) - \phi_{01}^-(v^2)\big] + \\ +\frac{1}{12i}f(-\bar{k}_0)\mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{p})\big]\big(\frac{1}{p^2} - \frac{\exp(i\omega(p))}{\bar{p}^2}\big) \;+\; O(|v^2||p|^{-3}).$$

$$\overset{2}{\mathcal{N}}{}^s(p,\xi,\eta) = \left[\frac{\exp(i\omega(p))}{\bar{p}}\big(\phi_{10}^+(v^2) - \phi_{10}^-(v^2)\big) + \right. \\ \left. +\left(\frac{1}{p} - \frac{\exp(i\omega(p))}{\bar{p}}\right)\frac{\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{p})]}{12i}\right]f_{10}^{(1)}(-\bar{k}_0) + \\ +\left[\frac{1}{\bar{p}}\exp(i\omega(p))\phi_{10}(v^2) + \frac{1}{12ip}\right]f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_0) + \\ +\left[\frac{\exp(i\omega(p))}{\bar{p}}\big(\phi_{01}^+(v^2) - \phi_{01}^-(v^2)\big) + \right. \\ \left. +\left(\frac{\bar{p}}{p^2} - \frac{\exp(\omega(p))}{\bar{p}}\right)\frac{\mathrm{sgn}\big[\Re(-\bar{p})\big]}{12i}\right]f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0) \;+ \\ +\;\left[\frac{1}{\bar{p}}\exp(i\omega(p))\phi_{01}(v^2) + \frac{\bar{p}}{12ip^2}\right]f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0) + \\ +O(|p|^{-2}) + O(|v|^2|p|^{-2}),$$

$$\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s(p,\xi,\eta) = -f(k_0)f(-\bar{k}_0)\left[\frac{-\bar{p}}{12ip^2} \;+\; \frac{1}{p}\left(-12i\phi_{01}(v^2)\overline{\phi_{10}(v^2)} + \right.\right. \\ \left. +iv^2\phi_{00}(v^2)\overline{\phi_{00}(v^2)}\right) - \frac{2}{p}\left[iv^2\left(\phi_{00}^+(v^2)\psi_{00}^-(v^2) + \phi_{00}^-(v^2)\psi_{00}^+(v^2)\right) + \right. \\ \left.\left. +12i\left(\phi_{01}^+(v^2)\psi_{01}^-(v^2) + \phi_{01}^-(v^2)\psi_{01}^+(v^2)\right) - \frac{1}{2}\psi_{01}\right]\right] \;+\; O(|v|^2|p|^{-2});$$

$$\overset{2}{\mathcal{M}}{}^s(p,\xi,\eta) = f(k_0)f_{10}^{(1)}(-\bar{k}_0)\frac{\bar{p}}{12ip} + f(k_0)f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_0)\left(\frac{\bar{p}}{12ip}+\frac{1}{12i}\right)\times$$
$$\times\mathrm{sgn}[\Re(p)] + f(k_0)f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0)\frac{\bar{p}^2}{24ip^2}+$$
$$+f(k_0)f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0)\left(\frac{\bar{p}^2}{24ip^2}-\frac{1}{24i}\right)\mathrm{sgn}[\Re(p)] + \Phi(v^2) + O(|v|^2|p|^{-1}),$$

$$\overset{3}{\mathcal{N}}{}^s(p,\xi,\eta) = \frac{1}{24i}\Big[\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{p})]\big(1-\exp(i\omega(p))\big)f_{20}^{(1)}(-\bar{k}_0)\Big]+$$
$$+\Big[\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{p})]\big(\frac{\bar{p}^2}{12ip^2}-\frac{\exp(i\omega(p))}{24i}\big)f_{02}^{(1)}(-\bar{k}_0)+\frac{\bar{p}^2}{24ip^2}f_{02}^{(2)}(-\bar{k}_0)\Big]+$$
$$+\Big[\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{p})]\big(\frac{\bar{p}}{12ip}+\frac{\exp(i\omega(p))}{12i}\big)f_{11}^{(1)}(-\bar{k}_0)+\frac{\bar{p}}{12ip}f_{11}^{(2)}(-\bar{k}_0)\Big]+$$
$$+f_0^2(-\bar{k}_0)f(k_0)\exp(i\omega(p))\Psi(v^2) + O(|v||p|^{-1}).$$

В этих формулах приняты обозначения:

$$\phi_{mn}^{\pm} = \int\int_{\mp\Re(r)>0} dr\wedge d\bar{r}r^m\bar{r}^n\exp(i\omega(r)),$$
$$\psi_{mn}^{\pm} = \int\int_{\mp\Re(r)>0} dr\wedge d\bar{r}r^m\bar{r}^n\exp(-i\omega(r)),$$
$$\phi_{mn} = \int\int_{\mathbb{C}} dr\wedge d\bar{r}r^m\bar{r}^n\exp(i\omega(r)),$$
$$\psi_{mn} = \int\int_{\mathbb{C}} dr\wedge d\bar{r}r^m\bar{r}^n\exp(-i\omega(r)), \tag{3.117}$$

в формуле для асимптотики функции $\overset{2}{\mathcal{M}}{}^s$ функция $\Phi(v^2)$– гладкая, равномерно ограниченная при $v^2\in\mathbb{R}$; в формуле для асимптотики $\overset{3}{\mathcal{N}}$ функция $\Psi(v^2)$ – гладкая, равномерно ограниченная при $v^2\in\mathbb{R}$.

Вычислим асимптотику коэффициентов внешнего разложения при

$k \to k_0$ и $\partial_k^2 S = o(1)$.

$$\overset{1}{n}_1 |_{k\to k_0} = \frac{1}{12i(k-k_0)^2} f(-\bar{k}_0)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] + \frac{1}{12i(k-k_0)}\Bigg[f_{10}^{(1)}(-\bar{k}) +$$

$$+ f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}}{k-k_0} + \left(f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_0) + f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}}{k-k_0}\right)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})]\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{2}f_{20}^{(1)}(-\bar{k}) + f_{11}^{(1)}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}}{k-k_0} + \frac{1}{2}f_{02}^{(1)}\frac{\overline{(k-k_0)^2}}{(k-k_0)^2} + \Bigg(\frac{1}{2}f_{20}^{(2)}(-\bar{k}_0) +$$

$$+ f_{11}^{(2)}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}}{k-k_0} + \frac{1}{2}f_{02}^{(2)}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{(k-k_0)^2}}{(k-k_0)^2}\Bigg)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] + o(1).$$

$$\overset{2}{n}_0{}' = \frac{1}{12i\overline{(k-k_0)^2}}\frac{1}{2i\pi}\left[\pi i f(-\bar{k}_0)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{p})] + V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda f(i\lambda)}{\lambda - ik_0}\right] +$$

$$+\frac{1}{12i\overline{(k-k_0)}}\frac{1}{\pi i}\Bigg[\pi i f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0) + \pi i f_{10}^{(1)}(-\bar{k}_0) + \big(\pi i f_{10}(2)(-\bar{k}_0) +$$

$$+\pi i f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0)\big)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k}_0)] +$$

$$+ V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda f(i\lambda)}{(\lambda - ik_0)^2}\Bigg] + \frac{1}{12i}\Bigg[\pi i f_{20}^{(1)}(-\bar{k}_0) +$$

$$+2\pi i f_{11}^{(1)}(-\bar{k}_0) + \pi i f_{02}^{(1)}(-\bar{k}_0) + \big(\pi i f_{20}^{(2)}(-\bar{k}_0) + 2\pi i f_{11}^{(2)}(-\bar{k}_0) +$$

$$+\pi i f_{02}^{(2)}(-\bar{k}_0)\big)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] + V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda f(i\lambda)}{(\lambda - ik_0)^3}\Bigg] + o(1).$$

$$\overset{1}{m}{}^s = \frac{\overline{(k-k_0)}}{12i(k-k_0)^2} f(-\bar{k}_0)f(k_0) -$$

$$\frac{\overline{k-k_0}}{12i(k-k_0)}\Bigg[\big(f_{10}^{(1)}(-\bar{k}_0)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] +$$

$$+ f_{10}^{(2)}(-\bar{k}_0)\big)f(k_0) + f(-\bar{k}_0)\big(f_{10}^{(1)}(k_0)\mathrm{sgn}[\Re(k)] + f_{10}^{(2)}(k_0)\big)\Bigg] -$$

$$-\frac{\overline{(k-k_0)^2}}{12i(k-k_0)^2}\Bigg[f(k_0)\big(f_{01}^{(1)}(-\bar{k}_0)\mathrm{sgn}[\Re(-\bar{k})] + f_{01}^{(2)}(-\bar{k}_0)\big) +$$

$$+ f(-\bar{k}_0)\big(f_{01}^{(1)}(k_0)\mathrm{sgn}[\Re(k)] + f_{01}^{(2)}(k_0)\big)\Bigg] + o(1).$$

Проведем согласование внешнего и внутреннего разложений функции $\tilde{\nu}$. Условие согласования для $\tilde{\nu}$ в области $t^{-1/3} \ll |k-k_0| \ll 1$ при $|\theta| \ll 1$ имеет вид:

$$\big(t^{-2/3}\overset{1}{n}_0 + t^{-1}\overset{2}{n}_0 + t^{-1}\overset{1}{n}_1 \exp(itS)\big) -$$

$$-\left(t^{-1/3}\overset{1}{\mathcal{N}}+t^{-2/3}\overset{2}{\mathcal{N}}+t^{-1}\overset{3}{\mathcal{N}}\right)=o(t^{-1}).$$

В этой формуле приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t. В результате получим:

$$\overset{1}{n}_0=\frac{1}{\overline{k-k_0}}f(-\bar{k}_0)[\phi^+_{00}(v^2)-\phi^-_{00}(v^2)], \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{n}_0=\frac{1}{\overline{k-k_0}^2}f(-\bar{k})[\phi^+_{01}(v^2)-\phi^-_{01}(v^2)]+\\+\frac{1}{\overline{k-k_0}}f^{(1)}_{10}(-\bar{k}_0)[\phi^+_{10}(v^2)-\phi^-_{10}(v^2)]+\\+\frac{1}{\overline{k-k_0}}f^{(2)}_{10}(-\bar{k}_0)\phi_{10}(v^2)+\\+\frac{1}{\overline{k-k_0}}f^{(1)}_{01}(-\bar{k}_0)[\phi^+_{01}(v^2)-\phi^-_{01}(v^2)]+\\+\frac{1}{\overline{k-k_0}}f^{(2)}_{01}(-\bar{k}_0)\phi_{01}(v^2),\end{aligned} \tag{3.119}$$

где ϕ, ψ, $\phi^\pm$ и $\psi^\pm$ определены в (3.117);

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathcal{N}}=\mathcal{P}[g_1],\quad \overset{2}{\mathcal{N}}=\mathcal{P}[g_2],\\ \overset{3}{\mathcal{N}}=\mathcal{P}[g_3]-f_0^2(-\bar{k}_0)f(k_0)\exp(i\omega(p))\Psi(v^2),\end{aligned} \tag{3.120}$$

где g_j– правые части в уравнениях для $\overset{j}{\mathcal{N}}$, оператор $\mathcal{P}[g]$ определен формулой (3.105), функция $\Psi(v^2)$ – гладкая, равномерно ограниченная по v^2 при $v^2\in\mathbb{R}$.

Условие согласования для $\tilde{\mu}$ в области $t^{-1/3}\ll|k-k_0|\ll 1$ при $|\theta|\ll 1$ имеет вид:

$$\left(1+t^{-1}\overset{1}{m}\right)-\left(1+t^{-2/3}\overset{1}{\mathcal{M}}+t^{-1}\overset{2}{\mathcal{M}}\right)=o(t^{-1}).$$

В результате получим:

$$\overset{1}{\mathcal{M}}=\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s;\quad \overset{2}{\mathcal{M}}=\overset{2}{\mathcal{M}}{}^s-\Phi(v^2), \tag{3.121}$$

где $\overset{1}{\mathcal{M}}{}^s$ определена формулой (3.106), функция $\overset{2}{\mathcal{M}}{}^s$ определена формулой

(3.107), функция $\Phi(v^2)$ – гладкая, равномерно ограниченная при $v^2 \in \mathbb{R}$.

$$\overset{1}{m}=\overset{1}{m}{}^s - \frac{1}{k-k_0}\Bigg(-12i\phi_{01}(v^2)\overline{\phi_{10}(v^2)} + iv^2\phi_{00}(v^2)\overline{\phi_{00}(v^2)}\Bigg) -$$
$$-\frac{2}{k-k_0}\Bigg[iv^2\Bigg(\phi^+_{00}(v^2)\psi^-_{00}(v^2) + \phi^-_{00}(v^2)\psi^+_{00}(v^2)\Bigg) +$$
$$+12i\Bigg(\phi^+_{01}(v^2)\psi^-_{01}(v^2) + \phi^-_{01}(v^2)\psi^+_{01}(v^2)\Bigg) - \frac{1}{2}\psi_{01}\Bigg]. \quad (3.122)$$

Здесь $\overset{1}{m}{}^s$ определена в (3.116), функции $\psi^{\pm}$, $\phi^{\pm}$, ϕ и ψ – в формулах (3.117).

Внутреннее в окрестности k_0 и внешнее разложения $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ согласованы. Лемма доказана.

Построенные внутреннее и внешнее разложения неравномерны по параметру k. Так же, как в пункте 3.1 построим составное разложение, равномерно пригодное при $k \in \mathbb{C}$. Следуя методу согласования асимптотических разложений [29], равномерно пригодное разложение можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_1 \\ \tilde{\mathcal{N}}_1 \end{pmatrix} - A_{1,k}\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_1 \\ \tilde{\mathcal{N}}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.123)$$

Здесь для вычисления действия оператора $A_{n,k}$ на $\tilde{\mathcal{M}}_1$ в формуле для $\mathcal{M}_1$ надо заменить переменную p на переменную k в соответствии с формулой (3.95) и выписать все члены асимптотического разложения по t со степенями $-m$, где $0 \le m \le n$. В частности, для функции $\tilde{\mathcal{M}}(p, \xi, \eta, t)$

получим:

$$
\begin{aligned}
A_{1,k}[\tilde{\mathcal{M}}(p,\xi,\eta,t)] = 1 + t^{-1}\Bigg(& - f(k_0)f(-\bar{k}_0)\Bigg[\frac{-\overline{k-k_0}}{12i(k-k_0)^2} + \\
& + \frac{1}{k-k_0}\Bigg(- 12i\phi_{01}(v^2)\overline{\phi_{10}(v^2)} + iv^2\phi_{00}(v^2)\overline{\phi_{00}(v^2)}\Bigg) - \\
& - \frac{2}{k-k_0}\Bigg[iv^2\Bigg(\phi^{+}_{00}(v^2)\psi^{-}_{00}(v^2) + \phi^{-}_{00}(v^2)\psi^{+}_{00}(v^2)\Bigg) + \\
& + 12i\Bigg(\phi^{+}_{01}(v^2)\psi^{-}_{01}(v^2) + \phi^{-}_{01}(v^2)\psi^{+}_{01}(v^2)\Bigg) - \frac{1}{2}\psi_{01}\Bigg]\Bigg] \\
& + f(k_0)f^{(1)}_{10}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}}{12i(k-k_0)} + \\
& + f(k_0)f^{(2)}_{10}(-\bar{k}_0)\Bigg(\frac{\overline{k-k_0}}{12i(k-k_0)} + \frac{1}{12i}\Bigg) \times \\
& \times \mathrm{sgn}[\Re(k)] + f(k_0)f^{(1)}_{01}(-\bar{k}_0)\frac{\overline{k-k_0}^2}{24i(k-k_0)^2} + \\
& + f(k_0)f^{(2)}_{01}(-\bar{k}_0)\Bigg(\frac{\overline{k-k_0}^2}{24i(k-k_0)^2} - \frac{1}{24i}\Bigg)\mathrm{sgn}[\Re(k)]\Bigg),
\end{aligned}
$$

Явное выражение для $A_{1,k}[\tilde{\mathcal{N}}]$ более громоздко и поэтому здесь не приводится.

Теорема 14. *Формула (3.123) дает асимптотическое по $mod(o(t^{-1}))$ при $t \to \infty$ решение задачи (3.53), равномерно по $k \in \mathbb{C}$ и $|\theta| \gg 1$.*

3.3.5 Обоснование асимптотики решения $\bar{D}$ – задачи

В этом разделе доказано, что остаток асимптотики имеет порядок $t^{-4/3}$ равномерно по $k \in \mathbb{C}$ и дифференцируем по параметру x. Остатком асимптотики здесь называется разность между решением задачи (3.53) и асимптотическим решением (3.78) при $\theta^2 t^{-2/3} \gg 1$, (3.94) при $-\theta^2 t^{-2/3} \gg 1$ и (3.123) при $|\theta| \ll 1$. Дифференцируемость остатка асимптотики важна при построении временной асимптотики решения уравнения КП-2.

Теорема 15. *Пусть $\partial^\alpha f(k,\bar{k}) \in L_1 \cap C^1$ при $|\alpha| \le 2$ вне мнимой оси комплексного параметра k и*

$$
\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|\int\int_{\mathbb{C}} \frac{dk\wedge d\bar{k}}{|k-z|}|F(k)|\right| < 2\pi,
$$

тогда решение задачи (3.53):

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix} + O(t^{4/3}), \tag{3.124}$$

при $k \in \mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Остаток асимптотики равномерно дифференцируем по x.

Доказательство. Выпишем систему дифференциальных уравнений для остатка. Для этого обозначим остаток в формуле (3.128) через V. Подставим (3.128) в (3.53). В результате получим:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{k}} & 0 \\ 0 & \partial_k \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & F(-\bar{k})\exp(itS) \\ F(k)\exp(-itS) & 0 \end{pmatrix} V + f, \tag{3.125}$$

$$V|_{|k|\to\infty} = 0. \tag{3.126}$$

Здесь f – невязка в уравнении (3.53) при подстановке в него столбца $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})^T$:

$$f_1 = -\partial_{\bar{k}}\tilde{\mu} \, + \, F(-\bar{k})\exp(itS)\tilde{\nu},$$

$$f_2 = -\partial_k\tilde{\nu} \, + \, F(k)\exp(-itS)\tilde{\mu}.$$

Обозначим через X пространство ограниченных непрерывных по k вектор-функций с нормой:

$$||W|| = \sup_{k\in\mathbb{C},(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} |W_1| + \sup_{k\in\mathbb{C},(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} |W_2|.$$

От задачи (3.125), (3.126) перейдем к системе интегральных х уравнений:

$$V = G[F]V + H, \tag{3.127}$$

где $G[F]$ – интегральный оператор:

$$G[F]V = \frac{1}{2i\pi} \int\int_{m\in\mathbb{C}} dm \wedge d\bar{m} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \frac{F(-\bar{m})}{k-m}\exp(itS) \\ \frac{F(m)}{\overline{k-m}}\exp(-itS) & 0 \end{pmatrix} V(m,\xi,\eta,t);$$

$$H = \frac{1}{2i\pi}\int\int_{m\in\mathbb{C}} dm \wedge d\bar{m} \begin{pmatrix} \frac{f_1(m,\xi,\eta,t)}{k-m} \\ \frac{f_2(m,\xi,\eta,t)}{\overline{k-m}} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись явным представлением функций $f_{1,2}$ можно показать, что

$$||H|| = O(t^{-4/3}),$$

равномерно по $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{C}$.

Оператор $G[F]$ – сжимающий в пространстве X, поэтому решение интегрального уравнения (3.127) существует в X и в X оценивается величиной $O(t^{-4/3})$ равномерно по $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

Покажем, что остаток асимптотики дифференцируем по параметру $x = t\xi$. Продифференцируем по x систему уравнений для остатка. Обозначим производную вектора V по x через χ. Тогда для χ получим:

$$\chi = G[F]\chi + \partial_x G[F]V + \partial_x H.$$

Неоднородные слагаемые в правой части этого уравнения оцениваются величиной $O(t^{-4/3})$ в пространстве X, оператор $G[F]$ – сжимающий в X, поэтому для χ справедлива оценка: $||\chi|| = O(t^{-4/3})$. Теорема доказана.

3.3.6 Решение уравнения КП-2

Асимптотика решения задачи (3.50) при $t \to \infty$ записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}(k, \bar{k}, \xi, \eta, t) + \begin{pmatrix} -\tilde{\nu} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}(-\bar{k}, -k, \xi, \eta, t) + O(t^{-4/3}). \quad (3.128)$$

Второе слагаемое в этой формуле – решение задачи (3.50) с краевым условием:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}\Bigg|_{|k|\to\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 10. Подставим функцию ψ в формулу для решения уравнения КП-2 (3.51). Продифференцируем подынтегральное выражение по x. Главными под интегралом оказываются слагаемые, полученные при дифференцировании экспоненты. Производные по

x остальных сомножителей оказываются малыми из-за их медленной зависимости от x. Интегралы по плоскости от этих слагаемых оцениваются величиной $O(t^{-4/3})$ равномерно по $(x,y) \in \mathbb{R}$. Перепишем получившийся в главном члене интеграл, как интеграл по вещественной плоскости: $(\kappa,\lambda) \in \mathbb{R}^2$, где $\kappa = \Re(k)$, $\quad \lambda = \Im(k)$. В результате получим:

$$u(x,y,t) = -4\int\int_{\mathbb{R}^2} d\kappa d\lambda\, |\kappa| f(\kappa + i\lambda) \times \\ \times \exp(it(8\kappa^3 - 24\kappa\lambda^2 + 2\kappa\xi + 4\kappa\lambda\eta)) \,+\, O(t^{-4/3}). \tag{3.129}$$

Таким образом, главный член асимптотики решения задачи Коши для уравнения КП-2 дается интегралом с быстро осциллирующей экспонентой. Перейдем к вычислению асимптотики этого интеграла. Условие невырожденности стационарных точек показателя экспоненты: $|\eta^2 + 12\xi| \neq 0$.

Пусть $\eta^2 + 12\xi > 0$ и $t^{1/3}|\eta^2 + 12\xi| \gg 1$, тогда стационарные точки: $\lambda_{1,2} = \frac{\eta}{12} \pm \sqrt{\eta^2 + 12\xi}$, $\quad \kappa_{1,2} = 0$. Метод стационарной фазы для двойного интеграла [78] дает:

$$u(x,y,t) = o(t^{-1}).$$

Пусть $\eta^2 + 12\xi < 0$ и $t^{1/3}|\eta^2 + 12\xi| \gg 1$, тогда $\lambda_{1,2} = \eta/12$, $\quad \kappa_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\eta^2 - 12\xi}$. Асимптотика интеграла имеет вид:

$$u(x,y,t) = -4t^{-1}\frac{\pi}{12i\sqrt{-\eta^2 - 12\xi}} f_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\eta^2 - 12\xi} + \frac{i\eta}{12}\right) \times \\ \times \exp\left(-11it\sqrt{-\frac{y^2}{t^2} - 12\frac{x}{t}}\right) + c.c. + o(t^{-1}).$$

Для вычисления главного члена асимптотики при $|12\xi + \eta^2| = o(1)$ в интеграле (3.129) перейдем к растянутым переменным $p_1 = t^{1/3}\Re(k - k_0)$, $p_2 = t^{1/3}\Im(k - k_0)$ и параметру $v^2 = t^{2/3}(\eta^2 + 12\xi)/\sqrt{12}$. В результате получим:

$$u(\xi,\eta,t) = 4it^{-1} f(k_0)\int\int_{\mathbb{R}^2} dp_1 dp_2\, p_1\, \exp(i(8p_1^3 - 2v^2 p_1 - 24p_1 p_2^2)) \,+ \\ + o(t^{-1}).$$

Возьмем внутренний интеграл по параметру p_2, воспользуемся четностью полученной подынтегральной функции по параметру p_1. В результате получим:

$$u(x,y,t) = 8it^{-1}\sqrt{\pi} f(i\eta/12)\Bigg(\int_0^\infty dp_1\sqrt{p_1}\cos\big(8p_1(p_1^2-8v^2)\big) + \\ + \int_0^\infty dp_1\sqrt{p_1}\sin\big(8p_1(p_1^2-8v^2)\big)\Bigg) + o(t^{-1}).$$

Теорема 10 доказана.

Глава 4

Метод обратной задачи и нелокальная задача Римана

Термин нелокальная задача Римана был введен С.В.Манаковым в связи с применением метода обратной задачи для уравнения КП-1 [132]. В этом разделе приведен алгоритм решения уравнений ДС-1 с помощью МОЗР. Он был предложен в работе [106]. Однако, решения, построенные в рамках подхода [106] не содержали уединенных волн. Позднее в [95] были построены пространственно локализованные решения ДС-1. Алгоритм МОЗР, включающий такие решения, был предложен в [109]. Он и будет кратко изложен в этом разделе.

В литературе часто используется, также и альтернативный подход к решению обратной задачи – с помощью интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко. Наиболее полно для нелинейных уравнений, связанных с двумерной гиперболической системой Дирака этот подход развит в монографии [61]. Там же исследованы вопросы о существовании решения и однозначной разрешимости обратной задачи рассеяния.

4-1 Решение уравнения ДС-1

Ниже используется уравнение ДС-1 в характеристических координатах: $\xi = x + y,\ \ \eta = x - y$:

$$
\begin{gathered}
i\partial_t Q + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + (g_1 + g_2)Q = 0, \\
\partial_\xi g_1 = -\tfrac{\sigma}{2}\partial_\eta |Q|^2, \quad \partial_\eta g_2 = -\tfrac{\sigma}{2}\partial_\xi |Q|^2, \quad \sigma = \pm 1.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Здесь приняты обозначения:

$$
Q = A, \quad \partial_\eta p = -g_1 + \frac{1}{2}\kappa |A|^2, \quad \partial_\xi p = -g_2 + \frac{1}{2}\kappa |A|^2.
$$

Мы будем считать, что задано начальное условие для функции $Q(t, \xi, \eta)$ и краевые условия для g_1 и g_2:

$$
Q = Q_0(\xi, \eta), \quad g_1|_{\xi \to -\infty} = u_1(\eta), \quad g_2|_{\eta \to -\infty} = u_2(\xi). \tag{4.2}
$$

Система уравнений ДС-1 является условием совместности для двух линейных систем уравнений:

$$
\begin{pmatrix} \partial_\xi & 0 \\ 0 & \partial_\eta \end{pmatrix}\psi = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}\psi \tag{4.3}
$$

и для системы уравнений, определяющей зависимость от времени:

$$
\partial_t \psi = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\partial_\xi - \partial_\eta)^2\psi
$$

$$
+ i\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}(\partial_\xi - \partial_\eta)\psi + \begin{pmatrix} ig_1 & -i\partial_\eta q_1 \\ i\partial_\xi q_2 & -ig_2 \end{pmatrix}\psi, \tag{4.4}
$$

если в этих системах принять $q_1 = Q,\ q_2 = -\bar{Q}$.

4.1.1 Прямая задача рассеяния

Прямая задача рассеяния, связанная с уравнениями ДС-1, состоит из двух шагов. Первый шаг – построение специальных решений гиперболической системы Дирака (4.3), удовлетворяющих задаче Гурса [109]:

$$\begin{aligned} &\psi^+_{11}|_{\xi\to-\infty} = \exp(ik\eta), \qquad \psi^+_{12}|_{\xi\to-\infty} = 0,\\ &\qquad\psi^+_{21}|_{\eta\to\infty} = 0, \quad \psi^+_{22}|_{\eta\to-\infty} = \exp(-ik\xi);\\ &\psi^-_{11}|_{\xi\to-\infty} = \exp(ik\eta), \qquad \psi^-_{12}|_{\xi\to\infty} = 0,\\ &\qquad\psi^-_{21}|_{\eta\to-\infty} = 0, \quad \psi^-_{22}|_{\eta\to-\infty} = \exp(-ik\xi). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Исследуем свойства решений этой системы. Приведенные в этом пункте утверждения хорошо известны и могут быть доказаны достаточно просто. Обычно в работах по формализму метода обратной задачи заранее предполагается, что решения обладают нужными свойствами. Доказательства часто опускаются (см., например, [109]). Математически строгие утверждения имеются в книге Л.П. Нижника [61], однако, в основном, они относятся к потенциалам $q_{1,2}$ из класса L_2. Нас же интересуют потенциалы из $L_1 \cap C^2$. Поэтому здесь приведем два утверждения о свойствах решений задачи Гурса.

В выкладках будут использоваться обозначения: $\psi_{(j)}$ – j-тый столбец матрицы ψ, $j = 1, 2$ и матрица $E(z) = \mathrm{diag}(\exp(z), \exp(-z))$.

Теорема 16. *Пусть $q_{1,2}(\xi,\eta) \in L_1$, тогда решения задач Гурса для системы уравнений (4.3) с условиями (4.5) существуют, единственны в C^1 и равномерно ограничены при $\Im(k) = 0$.*

Доказательство этой теоремы стандартно. Здесь приведем лишь схему. Для примера рассмотрим систему уравнений для вектора $\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k)$. Перепишем для него задачу Гурса в виде системы интегральных уравнений Вольтерра:

$$\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k) = E_{(1)}(ik\eta) + G_1[q]\psi^+_{(1)},$$

здесь $E_{(j)}(z)$ – j-ый столбец матрицы $E(z)$ и оператор $G_1[q]$:

$$G_1[q]\psi^+_{(1)} = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\, q_1(\xi',\eta)\psi^+_{21}(\xi',\eta,k) \\ \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, q_2(\xi,\eta')\psi^+_{11}(\xi,\eta',k) \end{array}\right].$$

Из интегрируемости функций $q_{1,2}(\xi,\eta)$ следует разрешимость системы интегральных уравнений и, как следствие – разрешимость соответствующей задачи Гурса. Также можно доказать существование и остальных вектор функций из задачи (4.3), (4.5).

Ниже окажется полезным еще одно вспомогательное утверждение о свойствах решений задачи Гурса.

Теорема 17. *Элементы матриц-функции $\psi^{\pm}(\xi,\eta,k)$ аналитические при $\pm\Im(k)>0$.*

Приведем схему доказательства этого утверждения также на примере столбца $\psi^{+}_{(1)}(\xi,\eta,k)$. Для этого обозначим $M^{+}_{j1}(\xi,\eta,k)=\exp(-ik\eta)\psi^{+}_{j1}(\xi,\eta,k)$, где $j=1,2$. Уравнения Вольтерра для $M^{+}_{j1}(\xi,\eta,k)$ имеют вид:

$$M^{+}_{11}(\xi,\eta,k)=1-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}d\xi' q_1(\xi',\eta)M^{+}_{21}(\xi',\eta),$$

$$M^{+}_{21}(\xi,\eta,k)=\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty}q_2(\xi,\eta')M^{+}_{11}(\xi,\eta',k)\exp(ik(\eta'-\eta)).$$

Нетрудно видеть, что при $\Im(k)>0$ существуют все производные по k функций $M^{+}_{j1}(\xi,\eta,k)$, $j=1,2$. То есть эти функции, а следовательно и элементы столбца $\psi^{+}_{(1)}(\xi,\eta,k)$, аналитические по k при $\Im(k)>0$. Доказательство свойств аналитичности по k остальных элементов матриц-функций $\psi^{\pm}(\xi,\eta,k)$ аналогично.

Следуя работе [109] выведем задачу Римана для элементов матриц $\psi^{\pm}$. Для этого рассмотрим интегральное уравнение для разности столбцов $\Psi_{(1)}=\psi^{+}_{(1)}-\psi^{-}_{(1)}$:

$$\begin{bmatrix}\psi^{+}_{11}\\ \psi^{+}_{21}\end{bmatrix}(\xi,\eta,k)-\begin{bmatrix}\psi^{-}_{11}\\ \psi^{-}_{21}\end{bmatrix}(\xi,\eta,k)=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}d\xi' q_1(\xi',\eta)\left[\psi^{+}_{21}(\xi',\eta,k)-\psi^{-}_{21}(\xi',\eta,k)\right]\\ \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k)\ +\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{-}_{11}(\xi,\eta',k)\end{bmatrix}.$$

Правую часть второй строки этой формулы перепишем в виде:

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k)\ +\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{-}_{11}(\xi,\eta',k)=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta' q_2(\xi,\eta')\left[\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k)-\psi^{-}_{11}(\xi,\eta',k)\right].$$

Обозначим:

$$f(\xi,k)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta' q_2(\xi,\eta')\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k).$$

Тогда для $\Psi_{(1)}$ получим интегральное уравнение:

$$\Psi_{11} = \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' q_1(\xi',\eta)\Psi_{21}(\xi',\eta,k)$$
$$\Psi_{21} = f(\xi,k) + \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' q_2(\xi,\eta')\Psi_{11}(\xi,\eta',k).$$

Заметим, что столбец $\psi^+_{(2)}(\xi,\eta,k)$ удовлетворяет похожей системе интегральных уравнений со свободным членом $\exp(-ik\xi)$. Это позволяет выразить $\Psi_{(1)}$ через $\psi^+_{(2)}(\xi,\eta,k)$, именно:

$$\Psi_{(1)}(\xi,\eta,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dl\, \psi^+_{(2)}(\xi,\eta,l)s_1(k,l),$$

где

$$s_1(k,l) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' d\eta' \exp(il\xi') q_2(\xi',\eta')\psi^+_{11}(\xi',\eta',k).$$

В результате получим:

$$\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k) - \psi^-_{(1)}(\xi,\eta,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dl\psi^+_{(2)}(\xi,\eta,l)s_1(k,l). \tag{4.6}$$

Такие же выкладки приводят к формуле:

$$\psi^+_{(2)}(\xi,\eta,k) - \psi^-_{(2)}(\xi,\eta,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dl\psi^-_{(1)}(\xi,\eta,l)s_2(k,l), \tag{4.7}$$

где

$$s_2(k,l) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' d\eta' \exp(il\xi') q_1(\xi',\eta')\psi^-_{22}(\xi',\eta',k).$$

Функции $s_1(k,l)$ и $s_2(k,l)$ называются данными рассеяния. Для вычисления данных рассеяния удобно ввести билинейную форму [128]:

$$(\chi,\mu)_q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta(\chi_1\mu_1\, q_2 + \chi_2\mu_2\, q_1). \tag{4.8}$$

Использовав это обозначение, данные рассеяния можно записать в виде:

$$s_1(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), E_{(1)}(il\xi))_q, \tag{4.9}$$

$$s_2(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\psi^-_{(2)}(\xi,\eta,k), E_{(2)}(il\eta))_q, \tag{4.10}$$

4.1.2 Эволюция данных рассеяния

Эволюция данных рассеяния может быть вычислена прямым дифференцированием по времени данных рассеяния [109]. В результате, после некоторых очевидных преобразований интегралов, получается линейное дифференциальное уравнение, содержащее свертки данных рассеяния с образами Фурье функций $u_1(\eta)$ и $u_2(\xi)$ из (4.2). Для образов Фурье данных рассеяния эти выражения принимают наиболее удобный вид. Обозначим:

$$\hat{s}_1(\xi,\eta,t) = \int_{\mathbb{R}^2} dkdl \exp(ik\xi + il\eta) s_1(\kappa, l, t),$$

тогда производная $\partial_t \hat{s}_1$ записывается в виде [109]:

$$i\hat{s}_1 = -\partial_\xi^2 \hat{s}_1 - \partial_\eta^2 \hat{s}_1 - (u_2(\xi) + u_1(\eta))\hat{s}_1. \tag{4.11}$$

Выражение для производной образа Фурье $\hat{s}_2$ получается, если в (4.11) заменить i на $-i$.

Формула (4.11) обычно рассматривается как уравнение для определения $\hat{s}_1$ в любой момент времени. Значение $\hat{s}_1$ при $t = 0$ может быть вычислено из начального условия.

Задача Коши для уравнения (4.11) решается методом Фурье. Зависимость от переменных t, ξ и η разделяется [109]. Решение уравнения (4.11) строится в виде:

$$\hat{s} = T(t)X(\xi)Y(\eta),$$

где

$$T' + i(k^2 + l^2)T = 0,$$
$$X'' + (u_2 + k^2)X = 0, \tag{4.12}$$
$$Y'' + (u_1 + l^2)Y = 0. \tag{4.13}$$

Будем рассматривать такие краевые условия $u_{1,2}$, что $\int_{-\infty}^{\infty} dx(1+x^2)|u_{12}(x)| < \infty$. Тогда решения уравнений (4.12) и (4.13), соответствующие дискретному и непрерывному спектрам образуют базисный набор функций в L_1 [76]. Воспользовавшись разложениями по этим базисам, решение задачи

Коши для уравнения (4.11) может быть записано в виде[109]:

$$\hat{s}_1(\xi,\eta,t) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{L}\rho_{jr}X_j(\xi)Y_r(\eta)\exp(it(\mu_j^2+\lambda_r^2)) +$$
$$\int_{\mathbb{R}} dk\Bigg(\sum_{j=1}^{M}\rho_j(k)\exp(it(\mu_j-k^2))X_j(\xi)Y(\eta,k) +$$
$$+\sum_{r=1}^{L}\bar{\rho}_r(k)\exp(it(\lambda_r^2-k^2))Y_r(\eta)X(\xi,k)\Bigg) +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^2} dkdl\rho(k,l)X(\xi,k)Y(\eta,l)\exp(-it(k^2+l^2)), \tag{4.14}$$

где

$$\rho_{jr} = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta \hat{s}_1(\xi,\eta,0)\bar{X}_j(\xi)\bar{Y}_r(\eta),$$
$$\rho(k,l) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta \hat{s}_1(\xi,\eta,0)\bar{X}(\xi,k)\bar{Y}(\eta,l),$$
$$\rho_j(k) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta \hat{s}_1(\xi,\eta,0)\bar{X}_j(\xi)\bar{Y}(\eta,k),$$
$$\rho_r(l) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta \hat{s}_1(\xi,\eta,0)\bar{X}(\xi,k)\bar{Y}_r(\eta).$$

Так определяется эволюция данных рассеяния.

4.1.3 Нелокальная задача Римана

Решение обратной задачи рассеяния также, как и решение прямой задачи состоит из двух шагов. Первый шаг – построение решений задачи (4.3) в любой момент времени. Как было показано, следуя [109], элементы матриц $\psi^{\pm}$ аналитические функции по переменной k при $\pm\Im(k) > 0$. Используя данные рассеяния, формулы (4.6), (4.7) и формулы Сохоцкого [12] можно записать нелокальную задачу Римана-Гильберта для ψ_{11}^{-} и ψ_{12}^{+} в виде системы интегральных уравнений [109]:

$$\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,k,t) = \exp(ik\eta) +$$
$$+\exp(ik\eta)\Bigg(\exp(-ik\eta)\int_{-\infty}^{\infty} dl\, s_1(k,l,t)\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,l,t)\Bigg)^{-},$$
$$\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,k,t) = \exp(-ik\xi)\Bigg(\exp(ik\xi)\int_{-\infty}^{\infty} dl\, s_2(k,l,t)\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,l,t)\Bigg)^{+},$$

где
$$\Big(f(k)\Big)^{\pm} = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,f(k')}{k'-(k\pm i0)}.$$
Похожую систему уравнений можно написать и для функций ψ_{21}^{-} и ψ_{22}^{+}:
$$\psi_{21}^{-}(\xi,\eta,k,t) = \exp(ik\eta)\times$$
$$\times\Bigg(\exp(-ik\eta)\int_{-\infty}^{\infty} dl\, s_1(k,l,t)\psi_{22}^{+}(\xi,\eta,l,t)\Bigg)^{-},$$
$$\psi_{22}^{+}(\xi,\eta,k,t) = \exp(-ik\xi)+$$
$$+\exp(-ik\xi)\Bigg(\exp(ik\xi)\int_{-\infty}^{\infty} dl\, s_2(k,l,t)\psi_{21}^{-}(\xi,\eta,l,t)\Bigg)^{+}.$$

Следующий шаг – построение решения уравнений ДС-1. Для этого удобно воспользоваться обозначением для билинейной формы:
$$\langle\chi,\mu\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dkdl(\chi^1(l)\mu^1(k)\,s_2(k,l)\;+\;\chi^2(l)\mu^2(k)\,s_1(k,l)). \qquad (4.15)$$

Функции q_1 и q_2 могут быть записаны в виде:
$$q_1(\xi,\eta) = \frac{-1}{\pi}\langle\psi^{(1)}(\xi,\eta,l),E^{(1)}(ik\xi)\rangle_s, \qquad (4.16)$$
$$q_2(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\langle\psi^{(2)}(\xi,\eta,l),E^{(2)}(ik\eta)\rangle_s. \qquad (4.17)$$
Здесь $\psi^{(j)}$ – строка $[\psi_{j1}^{-},\psi_{j2}^{+}]$, также $E^{(j)}(z)$ – строка матрицы $E(z)$.

4.1.4 Солитонное решение

Для уравнения ДС-1 известны различные типы точных решений. Например, это плоские волны, распространяющиеся под углом друг к другу [94]. Решение типа многомерного локализованного солитона, стремящегося к не равной нулю постоянной во всех пространственных направлениях было построено в [139]. Здесь мы разберем построение с помощью МОЗР двумерного локализованного решения, полученного в [95]. В работе [109] такие решения были названы дромионами.

Дромионное решение уравнений ДС-1 получается, если начальные условия в задаче Коши для уравнения (4.11) такие, что данные рассеяния в начальный момент времени имеют специальный вид:
$$\rho(k,l,0)=0, \quad \rho_j(k)=0, \quad \rho_r(l)=0.$$

В этом случае в формуле (4.14) остаются только слагаемые, которые не содержат интегралов. Интегральные уравнения, к которым сводится нелокальная задача Римана в этом случае сводятся к уравнениям с вырожденными ядрами и решаются явно. Это позволяет получить явные формулы для решения уравнений ДС-1.

Для примера приведем формулы для функции $q(\xi,\eta,t)$, соответствующие одному дромиону (в формуле (4.14) $L=M=1$).

$$Q(\xi,\eta,t)=$$
$$\frac{8\rho\lambda\mu\exp(it(\lambda^2+\mu^2))}{\cosh(\mu\xi)\cosh(\lambda\eta)(16-\sigma|\rho|^2\mu\lambda(1+\tanh(\lambda\eta))(1+\tanh(\mu\xi)))}, \tag{4.18}$$

где λ, μ – вещественные постоянные, однозначно определяющиеся из краевых условий при $\eta\to-\infty$ и $\xi\to-\infty$; ρ – параметр решения, определяющийся начальным значением для функции Q. Краевые условия в этом случае имеют вид:

$$u_1\equiv\frac{\lambda^2}{2\cosh^2(\lambda\eta)},\quad u_2\equiv\frac{\mu^2}{2\cosh^2(\mu\xi)}. \tag{4.19}$$

В дромионном случае вычислены в явном виде решения прямой задачи рассеяния [109]. Приведем две пары этих решений, которые будут использованы при построении теории возмущений для дромиона. Первый столбец матрицы ψ^+:

$$\begin{pmatrix}\psi^+_{11}\\ \psi^+_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp(ik\eta)\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\int_\eta^\infty\frac{dp\lambda\exp(ikp))}{2\cosh(\lambda p)}}{(1-\sigma|\rho|^2\frac{\lambda\mu}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\frac{-\sigma|\rho|^2\lambda\mu(1+\tanh(\mu\xi))}{8\cosh(\lambda\eta)}\\ \frac{\sigma\bar\rho\mu\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\mu\xi)}\end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Второй столбец матрицы ψ^+:

$$\begin{pmatrix}\psi^+_{12}\\ \psi^+_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \exp(-ik\xi)\end{pmatrix}+\frac{\int_\infty^\xi\frac{dp\mu\exp(ikp))}{2\cosh(\mu p)}}{(1-\sigma|\rho|^2\frac{\lambda\mu}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\frac{-\rho\lambda\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\lambda\eta)}\\ \frac{\sigma|\rho|^2\lambda\mu(1+\tanh(\lambda\eta))}{8\cosh(\mu\xi)}\end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Первый столбец матрицы ψ^-:

$$\begin{pmatrix} \psi_{11}^- \\ \psi_{21}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(ik\eta) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\int_{-\infty}^{\eta} \frac{dp\lambda \exp(ikp))}{2\cosh(\lambda p)}}{(1-\sigma|\rho|^2 \frac{\lambda\mu}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{-\sigma|\rho|^2\lambda\mu(1+\tanh(\mu\xi))}{8\cosh(\lambda\eta)} \\ \frac{\sigma\bar{\rho}\mu\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\mu\xi)} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Второй столбец матрицы ψ^-:

$$\begin{pmatrix} \psi_{12}^- \\ \psi_{22}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-ik\xi) \end{pmatrix} + \frac{\int_{\infty}^{\xi} \frac{dp\mu \exp(ikp))}{2\cosh(\mu p)}}{(1-\sigma|\rho|^2 \frac{\lambda\mu}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{\sigma\bar{\rho}\lambda\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\mu\xi)} \\ \frac{-\sigma|\rho|^2\lambda\mu(1+\tanh(\lambda\eta))}{8\cosh(\lambda\eta)} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Глава 5

Временные асимптотики нелокальной задачи Римана

5-1 Асимптотика решения уравнений ДС-1

Здесь МОЗР используется для построения асимптотики при $t \to \infty$ решения задачи Коши:

$$i\partial_t Q + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + \frac{\kappa}{2}\left(\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \partial_\eta |Q|^2 + \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \partial_\xi |Q|^2\right)Q = 0, \quad (5.1)$$

$$Q|_{t=0} = Q_0(\xi, \eta).$$

В такой форме можно записать уравнение Деви-Стюартсона-1 с нулевыми граничными условиями для компонент $g_{1,2}$ при $\xi \to -\infty$ и $\eta \to -\infty$ соответственно.

При $t \to \infty$ построенное решение имеет порядок $O(t^{-1})$ и быстро осциллирует. Огибающая осцилляций определяется данными рассеяния и зависит от характерных переменных ξ/t и η/t. Эти результаты были получены в работе автора [43].

Структура асимптотик решений интегрируемых уравнений размерности 2+1 (две пространственные переменные и время) отличается от хорошо исследованного (1+1)-мерного случая. С технической стороны, особенность уравнения ДС-I, по сравнению с (1+1)-мерными интегрируемыми уравнениями, заключена во вспомогательной линейной задаче, которая используется для интегрирования уравнения с помощью МОЗР. Для уравнения (5.1) обратная задача – нелокальная задача Римана. В этом разделе строится асимптотика при $t \to \infty$ решения системы интегральных уравнений, эквивалентных нелокальной задаче Римана. Затем эта асимптотика используется для построения асимптотики решения уравнения (5.1) при $t \to \infty$. Решающее условие, приводящее к убывающей асимптотике – нулевые граничные условия компонент $g_{1,2}$. В частности, они обеспечивают отсутствие дискретной составляющей в представлении решения с помощью МОЗР.

5.1.1 Основной результат

Для решения задачи Коши для (5.1) используются данные рассеяния в начальный момент времени [109]:

$$S(k,l) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, \psi_{22}^{-}(\xi,\eta,k,0) \exp(il\eta) Q_0(\xi,\eta).$$

Сформулируем утверждение об асимптотике решения уравнения (5.1).

Теорема 18. *Пусть $S(k,l) \in C^2$, $\partial^\alpha S(k,l) \in L_1$, где $\alpha = 1,2$ и удовлетворяет условию:*

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2\pi}||S(l,k)||_{L_1} + \tfrac{1}{\pi}|| \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dl |\partial_k S(l,k)|\, ||_C + \tfrac{1}{\pi} \left|\left| \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |S(l,k)| dl \right|\right|_C + \\ + \tfrac{1}{\pi} \left|\left| \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_k S(k,l)| dl \right|\right|_C + \tfrac{1}{\pi} \left|\left| \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |S(k,l)| dl \right|\right|_C < 1, \end{gathered} \tag{5.2}$$

тогда при $t \to \infty$ асимптотика решения уравнения (5.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta,t) = \frac{1}{t} \exp\big(\frac{it}{4}(x^2+y^2)\big) \Bigg[\bigg(iS\big(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \overset{0}{\mu}_1 \big(x,y,\frac{x}{2}\big) \bigg) + \\ + O(t^{-3/2}) \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь $x = \xi/t$, $\quad y = \eta/t$; функция $\overset{0}{\mu}_1 (x,y,k)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered} \overset{0}{\mu}_1 (x,y,k) = \textstyle\int_{-\infty}^{y/2} dl\; \overset{0}{\mu}_2 (x,y,l) S(k,l), \\ \overset{0}{\mu}_2 (x,y,k) = \textstyle\int_{x/2}^{\infty} dl\, \kappa \bar{S}(l,k) S(l,k) + \int_{x/2}^{\infty} dl\; \overset{0}{\mu}_1 (x,y,l) \bar{S}(l,k). \end{gathered} \tag{5.4}$$

Замечание 9. *Если данные рассеяния имеют вид:*

$$S(k,l)=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(k)\tau_j(l), \tag{5.5}$$

тогда решение задачи Коши для ДС-I вычисляется явно [106]. Это решение имеет асимптотику:

$$Q=t^{-1}\exp(it(x^2+y^2)/4)\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\bigl(\frac{x}{2}\bigr)\left(\tau_j\bigl(\frac{y}{2}\bigr)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\overset{0}{\chi}_j\left(x,y,\frac{x}{2}\right)\right)+ \\ +O\bigl(t^{-3/2}\bigr),$$

функции $\overset{0}{\chi}_j(x,y,k)$ *– решения системы линейных алгебраических уравнений (5.11).*

5.1.2 Асимптотика решения нелокальной задачи Римана

Для построения потенциала $Q(\xi,\eta,t)$ по данным рассеяния $S(k,l)$ при $t>0$ будем использовать систему уравнений, эквивалентную нелокальной задаче Римана ([109]):

$$\begin{bmatrix}\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,k,t)\\ \psi_{12}^{+}(\xi,\eta,k,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\exp(ik\eta)\\ 0\end{bmatrix}+F[\psi], \tag{5.6}$$

где

$$F_1[\psi]=\frac{\exp(ik\eta)}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(-ik'\eta)}{k'-(k-i0)}\int_{-\infty}^{\infty}dl\times \\ \times\left(\kappa\bar{S}(l,k')\exp(it(k'^2+l^2))\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,l,t)\right),$$

$$F_2[\psi]=\frac{\exp(-ik\xi)}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(ik'\xi)}{k'-(k+i0)}\int_{-\infty}^{\infty}dl\times \\ \times\left(S(k',l)\exp(-it(k'^2+l^2))\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,l,t)\right).$$

В этом разделе построена асимптотика решения системы (5.6) при $t\to\infty$.

Теорема 19. *Пусть функция $S(k,l) \in C^1$ удовлетворяет условию (5.2) тогда решение системы (5.6) при $t \to \infty$ имеет вид:*

$$\psi_{11}^- = \exp(ik\eta) + t^{-1/2}\exp(ik^2t + ity^2/4)\varphi_1(x,y,k,t) + O(t^{-1}),$$
$$\psi_{12}^+ = t^{-1/2}\exp(-ik^2t + ity^2/4)\varphi_2(x,y,k,t) + O(t^{-1}).$$

при $x, y \in \mathbb{R}$. Функции $\varphi_1(x,y,k,t)$ и $\varphi_2(x,y,k,t)$ – решения системы интегральных уравнений (5.10).

Замечание 10. *Зависимость функций φ_1 и φ_2 от параметра t существенна в малой порядка $O(t^{-1/2})$ окрестности точек $k = y/2$ и $k = x/2$.*

Для доказательства теорему 19 исследуем свойства интегрального оператора $F[\psi]$ из правой части (5.6). Обозначим через X пространство непрерывных вектор-функций $h(k) = [h_1(k), h_2(k)]^T$ с нормой:

$$||h(k)||_X = ||h_1||_C + ||h_2||_C.$$

Лемма 13. *Пусть $S(k,l)$ такая, что выполнены условия (5.2), тогда интегральный оператор $F[\psi]$ сжимающий в пространстве X.*

Доказательство.

Рассмотрим интегральный оператор $F_1[\psi]$ из правой части системы уравнений (5.6). Поменяем порядок интегрирования по k' и l. Интеграл по k' представим в виде суммы интегралов по k' от $-\infty$ до $k-1$, от $k-1$ до $k+1$ и от $k+1$ go ∞. Сумма интегралов по k' при $k' \in (-\infty, k-1)$ и $k' \in (k+0, \infty)$ легко оценивается через $\int_{-\infty}^{\infty} dk' |S(l,k')|$. Оценим интеграл по k' от $k-1$ до $k+1$:

$$\left| \int_{k-1}^{k+1} \frac{dk' \exp(-ik'\eta + itk'^2)}{k' - (k - i0)} \bar{S}(l,k) \right| \leq \int_{k-1}^{k+1} dk' \left| \frac{\bar{S}(l,k') - \bar{S}(l,k)}{k' - k} \right| +$$
$$+ |\bar{S}(l,k)| \left| \int_{k-1}^{k+1} \frac{dk' \exp(-ik'\eta + itk'^2)}{k' - (k - i0)} \right| \leq$$
$$\leq 2 \max_{k' \in [k-1,k+1]} |\partial_{k'} \bar{S}(l,k')| \, + \, 2\pi |\bar{S}(l,k)|.$$

Тогда $F_1[\psi]$ оценивается величиной:

$$\max_{k\in\mathbb{R}} |F_1[\psi]| \leq \left(\frac{1}{2\pi} ||S(l,k)||_{L_1} + \max_{k\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl |\partial_k S(l,k)| \right) + \right.$$

$$+\max_{k\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dl|S(l,k)|\right)\Bigg)||\psi_2||_C.$$

Непрерывность $F_1[\psi]$ по параметру k следует из гладкости $S(k,l)$ (см., например, [12], с.44).

Такие же утверждения справедливы и для второй компоненты интегрального оператора $F[\psi]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 19. Построим асимптотическое при $t \to \infty$ представление интегральных операторов в (5.6). Представим интеграл по k' в первом интегральном операторе в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(it(k'^2-k'y))}{k'-(k-i0)}\bar{S}(l,k')=$$

$$=\bar{S}(l,k)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(it(k'^2-k'y))}{k'-(k-i0)}+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}dk'\,\frac{\bar{S}(l,k')-\bar{S}(l,k)}{k'-(k-i0)}\exp(it(k'^2-k'y). \qquad (5.7)$$

Первый из этих интегралов запишем в виде разности интеграла в смысле главного значения и половины вычета подынтегральной функции в точке k. Интеграл в смысле главного значения можно выразить через интеграл Френеля [67], с.334. В результате получим:

$$\Phi(k,y,t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(it(k'^2-k'y))}{k'-(k-i0)}=$$

$$=\sqrt{2\pi}(1-i)\exp(it(k^2-ky)\phi(t^{1/2}(\frac{y}{2}-k))\;-\;i\pi\exp(it(k^2-ky)),$$

где $\phi(z)=\int_0^z dz'\,\exp(iz'^2)$ – интеграл Френеля.

Для второго интеграла в правой части формулы (5.7) при $t\to\infty$ пользуясь методом стационарной фазы [78] можно получить асимптотическое представление:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dk'\,\frac{\bar{S}(l,k')-\bar{S}(l,k)}{k'-(k-i0)}\exp(it(k'^2-k'y)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp(-ity^2/4+i\pi/4)\frac{\bar{S}(l,y/2)-\bar{S}(l,k)}{y/2-k}\;+\;O(t^{-1}).$$

В результате получим:

$$\frac{\exp(ik\eta)}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'\,\exp(it(k'^2-k'y))}{k'-(k-i0)}\bar{S}(l,k')=$$

$$=\frac{\exp(ik^2t)}{2i\pi}\bar{S}(l,k)\Phi(k,y,t)+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{t}}\frac{\exp(-ity^2/4+i\pi/4)}{2i\pi}\frac{\bar{S}(l,y/2)-\bar{S}(l,k)}{y/2-k}\;+\;O(t^{-1})$$

Похожее предстlвление справедливо для интеграла по k' во второй компоненте интегрального оператора $F[\psi]$. Tagим образом, при $t\to\infty$ систему интегральных уравнений можно записать в виде:

$$\psi_{18}^{-}(\xi,\eta,k,y)=\exp(ik\eta)+\frac{\exp(ik^2t)}{2i\pi}\Phi(k,y,t)\times$$

$$\times\kappa\int_{-\infty}^{\infty}dl\,\bar{S}(l,k)\exp(itl^2)\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,l,t)+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{t}}\frac{\exp(ik^2t)}{2i\pi}\exp(-ity^2/4+i\pi/4)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dl\frac{\bar{S}(l,y/2)-\bar{S}(l,k)}{y/2-k}\exp(itl^2)\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,l,t)\;+\;O(t^{-1}),$$

$$\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,k,s)=\frac{\exp(-ik^2t)}{2i\pi}\overline{\Phi(k,x,t)}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dl\,S(k,l)\exp(-itl^2)\psi_{31}^{-}(\xi,\eta,l,t)+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{t}}\frac{\exp(-itlx)}{2i\pi}\exp(itx^2/4-i\pi/4)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dl\frac{S(x/2,l)-S(k,l)}{x/2-k}\exp(-itl^2)\psi_{21}^{-}(\xi,\eta,l,t)\;+\;O(t^{-1}).\qquad(5.8)$$

Решение системы (5.6) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\psi_{11}^{-}&=\exp(ik\eta)+t^{-1/2}\exp(ik^2t+ity^2/4)\varphi_1(x,y,k,t)+\\&\quad+t^{-1}\Psi_1(\xi,\eta,t,k),\\\psi_{12}^{+}&=t^{-1/2}\exp(-ik^2t+ity^2/4)\varphi_2(x,y,k,t)+\\&\quad+t^{-1}\Psi_2(\xi,\eta,k,t).\end{aligned}\qquad(5.9)$$

Подставим анзатц (5.9) в (5.8). Асимптотику интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dl\, S(k,l) \exp(-it(l^2 + ly))$$

вычислим методом стационарной фазы. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t. Для φ_1 и φ_2 получим систему интегральных уравнений:

$$\varphi_1(x,y,k,t) = \tfrac{1}{2i\pi}\Phi(k,y,t) \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dl\, \kappa \bar{S}(l,k) \varphi_2(x,y,l,t),$$

$$\varphi_2(x,y,k,t) = \tfrac{1}{2i\pi}\overline{\Phi(k,x,t)}\times \tag{5.10}$$

$$\times\left(\sqrt{\pi} S(k,y/2) \exp(\tfrac{-i\pi}{4}) \;+\; \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dl\, S(k,l) \varphi_1(x,y,l,t)\right).$$

Для разрешимости этих интегральных уравнений в пространстве X достаточно, чтобы выполнялось условие (5.2). В этом случае ряд Неймана для системы (5.10) сходится абсолютно и равномерно при $x, y \in \mathbb{R}$.

Покажем, что вектор-функция $\Psi(\xi,\eta,k,t)$ в формуле (5.9) имеет порядок $O(1)$. Для этого выпишем интегральное уравнение для $\Psi(\xi,\eta,k,t)$:

$$\Psi(\xi,\eta,k,t) = f(x,y,k,t) \;+\; F[\Psi],$$

где компоненты вектора f вычисляются по формулам:

$$f_1(x,y,k,t) = t^{1/2}\, F_1[\exp(-ik^2 t + ity^2/4) \varphi_2(x,y,k,t)],$$

$$f_2(x,y,k,t) = t^{1/2}\left(t^{1/2} F_2[\exp(ikty)] + \right.$$

$$+ F_2[\exp(ik^2 t + ity^2/4) \varphi_1(x,y,k,t)] -$$

$$\left. - \frac{\overline{\Phi(k,x,t)}}{2i\pi}\left(\sqrt{\pi} S(k,y/2) \exp(-i\pi/4) \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} dl\, S(k,l) \varphi(x,y,l,t)\right)\right).$$

По построению асимптотики $||f(x,y,k,t)||_X = O(1)$, равномерно при $x, y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$. Оператор $F[\psi]$ сжимающий, тогда:

$$||\Psi(\xi,\eta,k,t)||_X = O(1), \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Теорема 19 доказана.

5.1.3 Вырожденные ядра

Нелокальная задача Римана (5.6) решается явно, если ядра интегральных уравнений вырожденны ([106]), то есть данные рассеяния имеют вид (5.5).

Явное решение при $t \to \infty$ выражается через интегралы от быстро осциллирующих функций. Вычислим асимптотику этого решения, воспользовавшись асимптотическим представлением (5.9) и интегральными уравнениями (5.10). Обозначим:

$$\chi_j(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dl\, \varphi_1(x,y,l,t)\tau_j(l),$$

$$\nu_j(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dl\, \varphi_2(x,y,l,t)\overline{\sigma}_j(l).$$

Для χ_j и ν_j получим систему $2n$ уравнений:

$$\chi_j(x,y,t) = \sum_{m=1}^{n} F_{jm}(y,t)\nu_m(x,y,t),$$

$$\nu_j(x,y,t) = g_j(x,y,t) + \sum_{m=1}^{n} G_{jm}(x,t)\chi_m(x,y,t),$$

где:

$$F_{jm}(y,t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tau_j(k)\bar{\tau}_m(k)\Phi(k,y,t),$$

$$G_{jm}(x,t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \sigma_m(k)\overline{\sigma}_j(k)\overline{\Phi(k,x,t)}$$

$$g_j(x,y,t) = \sum_{m=1}^{n} \tau_m\left(\frac{y}{2}\right)\frac{\exp(-i\pi/4)}{2i\pi}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \sigma_m(k)\bar{\sigma}_j(k)\overline{\Phi(k,x,t)}.$$

Построим асимптотику $G_{jm}(x,t)$ при $t \to \infty$. Для этого разобьем интеграл по k на два интеграла по интервалам $(-\infty, x/2]$ и $(x/2, \infty)$. В первом интервале представим $\Phi(k,x,t)$ в виде:

$$\overline{\Phi(k,x,t)} = -(1+i)\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{t^{1/2}(k-x/2)} dz\, \exp(-iz^2).$$

Тогда:

$$I^1_{jm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x/2} dk\, \overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)\overline{\Phi(x,k,t)} = -\frac{1}{2i\pi}(1+i)\sqrt{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{x/2} dk\,\overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)\int_{-\infty}^{t^{-1/2}(k-x/2)} dz\,\exp(-iz^2).$$

Далее интеграл по k проинтегрируем по частям, интегрируя произведение $\overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)$. В результате получим:

$$I^1_{jm}=-\frac{1+i}{i\sqrt{2\pi}}t^{1/2}\int_{-\infty}^{x/2} dk\,\exp(it(k-x/2)^2)\int_k^{x/2} dk'\,\overline{\sigma}_j(k')\sigma_m(k').$$

Воспользовавшись методом стационарной фазы для интеграла по k получим, что I^1_{jm} оценивается через $O(t^{-1/2})$.

В интеграле по промежутку $(x/2,\infty)$ функцию $\overline{\Phi(x,k,t)}$ представим в виде:

$$\overline{\Phi(k,x,t)}=2i\pi\,-\,(1+i)\sqrt{2\pi}\int_{t^{1/2}(k-x/2)}^{\infty} dz\,\exp(-iz^2),$$

тогда:

$$I^2_{jm}=\frac{1}{2i\pi}\int_{x/2}^{\infty} dk\,\overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)\overline{\Phi(k,x,t)}=\int_{x/2}^{\infty} dk\,\overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)-$$

$$-\frac{1}{2i\pi}(1+i)\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x/2} dk\,\overline{\sigma}(k)\sigma_m(k)\int_{t^{1/2}(k-x/2)}^{\infty} dz\,\exp(-iz^2).$$

Второе слагаемое в этой формуле оценивается также, как I^1_{jm}. В результате получим:

$$G_{jm}(x,t)=\int_{x/2}^{\infty} dk\,\overline{\sigma}_j(k)\sigma_m(k)\,+\,O(t^{-1/2}).$$

Аналогично:

$$F_{jm}(y,t)=-\int_{-\infty}^{y/2} dk\,\tau_j(k)\bar{\tau}_m(k)\,+\,O(t^{-1/2}),$$

$$g_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{n}\tau_j(y/2)\exp(-i\pi/4)\int_{x/2}^{\infty} dk\,\sigma_m(k)\bar{\sigma}_j(k)\,+\,O(t^{-1/2}).$$

Асимптотика решения задачи (5.6) имеет вид:

$$\psi^-_{11}=\exp(itky)+t^{-1/2}\exp(it(k^2+y^2/4))\times$$

$$\times\frac{1}{2i\pi}\Phi(y,k,t)\sum_{j=1}^{n}\kappa\overline{\tau}_j(k)\overset{0}{\nu}_j(x,y)\,+\,O(t^{-1}),$$

$$\psi_{12}^{+} = t^{-1/2}\exp(-it(k^2+y^2/4))\frac{1}{2i\pi}\overline{\Phi}(x,k,t)\times$$

$$\times(\sqrt{\pi}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(k)\tau_j(y/2)\exp(-i\pi/4)\ +\ \sigma_j(k)\overset{0}{\chi}_j(x,y))\ +\ O(t^{-1}).$$

Функции $\overset{0}{\chi}_j(x,y)$ и $\overset{0}{\nu}_j(x,y)$ – решения линейной алгебраической системы уравнений:

$$\begin{array}{rr} \overset{0}{\chi}_j(x,y) = & \sum_{m=1}^{n}\overset{0}{F}_{jm}\overset{0}{\nu}_m(x,y), \\ \overset{0}{\chi}_2(x,y) = & \overset{0}{g}_j(x,y) + \sum_{m=1}^{n}\overset{0}{G}_{jm}\overset{0}{\chi}_m(x,y), \end{array} \tag{5.11}$$

где

$$\overset{0}{F}_{jm}(x,y) = -\int_{-\infty}^{y/2}\tau_j(k)\bar{\tau}_m(k), \quad \overset{0}{G}_{jm}(x,y) = \int_{x/2}^{\infty}\sigma_j(k)\bar{\sigma}_m(k),$$

$$\overset{0}{g}_j = \sum_{m=1}^{n}\tau_j(y/2)\exp(-i\pi/4)\int_{x/2}^{\infty}dk\,\sigma_m(k)\bar{\sigma}_j(k).$$

5.1.4 Асимптотика решения ДС-I

Решение уравнения (5.1) получается по формуле:

$$Q(\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dkdl\,S(k,l)\exp(-it(k^2+l^2)+ik\xi)\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,l,t). \tag{5.12}$$

Для построения решения $Q(\xi,\eta,t)$ при $t\to\infty$ в формуле (5.12) вычислим асимптотику интеграла по k, подставим асимптотику функции ψ_{11}^{-} и вычислим асимптотику интеграла по l методом стационарной фазы [78]. В результате получим выражение для асимптотики решения уравнения (5.1):

$$Q(\xi,\eta,t) = \frac{1}{t}\ \exp(\frac{it}{4}(x^2+y^2))\,(-S(x/2,y/2)+$$

$$+\frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dl\ \ S(x/2,l)\varphi_1(x,y,l,t))\ +\ O(t^{-3/2}),$$

где $\varphi_1(x,y,l,t)$ – решение уравнения (5.10).

В этом выражении функция $\varphi_1(x,y,l,t)$ зависит от быстрой переменной t. Эта зависимость существенна в малых окрестностях точек $l=y/2$

и $l = x/2$. Интегрирование по l сглаживает эту зависимость. Поэтому для функции Q можно получить более точное асимптотическое представление (5.3), в котором зависимость от параметра t указана явно. Покажем, как сделать переход к (5.3).

Обозначим

$$\mu_1(k,x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dl\, S(k,l)\varphi_1(x,y,l,t),$$

$$\mu_2(k,x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dl\, \kappa\bar{S}(l,k)\varphi_2(x,y,l,t).$$

Функции μ_1 и μ_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$\mu_1(x,y,k,t) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dm\, \mu_2(m,x,y,t)S(k,m)\frac{1}{2i\pi}\overline{\Phi}(m,y,t),$$

$$\tag{5.13}$$

$$\begin{gathered}\mu_2(x,y,k,t) = H(k,x,y,t)+ \\ +\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dm\, \mu_1(m,x,y,t)\kappa\bar{S}(m,k)\frac{1}{2i\pi}\Phi(x,m,t),\end{gathered}$$

где

$$H(k,x,y,t) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\exp(-i\pi/4)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dm\, \kappa\bar{S}(m,k)\overline{\Phi(m,x,t)}S(m,y/2).$$

Асимптотика $H(k,x,y,t)$ при $t\to\infty$ может быть получена так же, как и асимптотика G_{jm} в пункте 5.1.3:

$$H(k,x,y,t) = \int_{x/2}^{-\infty} dl\, \kappa\bar{S}(l,k)S(l,y/2)\;+\;O(t^{-1/2}).$$

Будем искать асимптотики функций μ_1 и μ_2 в виде:

$$\tilde{\mu}_1 = \overset{0}{\mu}_1(k,x,y) + t^{-1/2}\,\overset{1}{\mu}_1(k,x,y,t),$$

$$\tilde{\mu}_2 = \overset{0}{\mu}_2(k,x,y) + t^{-1/2}\,\overset{1}{\mu}_2(k,x,y,t).$$

Тогда для $\overset{0}{\mu}_1$ и $\overset{0}{\mu}_2$ получим систему интегральных уравнений (5.4).

Функции $\overset{1}{\mu}_1(k,x,y,t)$ и $\overset{1}{\mu}_2(k,x,y,t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с тем же интегральным оператором, что и в системе (5.13). Этот интегральный оператор сжимающий в пространстве непрерывных функций X. Стандартным методом можно показать, что функции $\overset{1}{\mu}_1(k,x,y,t)$ и $\overset{1}{\mu}_2(k,x,y,t)$ – непрерывные, равномерно ограниченные по $k,x,y\in\mathbb{R}$ при $t\to\infty$.

Теорема об асимптотике решения ДС-1 доказана.

5-2 Формула для асимптотики решения уравнения КП-1

Асимптотическое решение уравнения КП-1

$$\partial_x(\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) = 3\partial_y^2 u$$

с достаточно быстрым убыванием во всех пространственных направлениях обсуждалась в [133].

В [133] был построен главный член формальной асимптотики решения нелокальной задачи Римана, а затем с его помощью получен главный член формальной асимптотики при $t\to\infty$ решения уравнения КП-1.

Приведем для справки результат из [133]. Формальная асимптотика $u(x,y,t)$ при $t\to\infty$ имеет вид:

$$u(x,y,t) = -\frac{2}{t}\partial_\xi\psi\big[K^{\pm}_{-1,+1}(\xi,\xi,\eta)\exp(it\psi(\xi,\eta)) + C.C.\big],$$

где:

$$\psi(\xi,\eta) = \frac{1}{108}(\eta^2-12\xi)^{3/2}.$$

Матрица $K^{\pm}_{\alpha,\beta}(\xi,\xi',\eta)$ является решением уравнения

$$K^{\pm}_{\alpha,\beta}(\xi,\xi',\eta) + F_{\alpha,\beta}(\xi,\xi',\eta) +$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=\pm1}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(\pm(\xi-\xi''))K^{\pm}_{\alpha,\gamma}(\xi,\xi'',\eta)F_{\alpha,\gamma}(\xi,\xi'',\eta)d\xi'' = 0.$$

Функция $\theta(x)$- ступенчатая функция,

$$F_{\alpha,\beta}(\xi,\xi',\eta) = \frac{\theta(\eta^2-12\xi)\theta(\eta^2-12\xi')}{4(\eta^2-12\xi)^{1/4}(\eta^2-12\xi')^{1/4}}f(k_\alpha(\xi,\eta),k_\beta(\xi',\eta)).$$

Здесь

$$k_\alpha(\xi,\eta) = \frac{1}{12}[\eta + \alpha(\eta^2 - 12\xi)^{1/2}], \quad \alpha = \pm 1.$$

Функция $f(k,l)$ выражается через данные рассеяния линейного уравнения Шредингера, связанного в МОЗР с уравнением КП-1.

Приведенная здесь формальная асимптотика неравномерна по пространственным переменным. Это связано с использованием ступенчатой функции для перехода от асимптотики при $\eta^2 - 12\xi > 0$ к асимптотике при $\eta^2 - 12\xi < 0$. Очевидно, что вблизи параболы $\eta^2 - 12\xi = 0$ асимптотическое решение имеет другой вид (см., например, раздел 3.3).

Глава 6

Теория возмущений солитона уравнения ДС-1

Этот раздел посвящен изложению результатов о возмущении гиперболической системы Дирака, связанной с уравнениями ДС-1 и о возмущении солитона (дромиона) уравнений ДС-1. Эти результаты получены в работах автора [41], [128] и [127].

Результаты, полученные в работе [128] о возмущении гиперболической системы Дирака можно интерпретировать как утверждение об устойчивости решения обратной задачи по отношению к малому возмущению потенциала.

6-1 Теория возмущений гиперболической системы Дирака

В этом разделе развита теория возмущений для двухкомпонентной гиперболической системы Дирака (4.3). Построен аналог преобразования Фурье, использующий формулы для вариаций данных рассеяния и вариаций потенциала. Если принять $q_1 = Q$ и $q_2 = \kappa\bar{Q}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), где Q эволюционирует в соответствии с уравнениями ДС-1 (4.1), тогда построенное преобразование дает возможность решить методом Фурье уравнение ДС-1, линеаризованное на Q и

g_{12} (лДС-1):

$$i\partial_t U + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)U + (g_1 + g_2)U + (V_1 + V_2)Q = iF(\xi, \eta, t),$$
$$\partial_\xi V_1 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\eta(Q\bar{U} + \bar{Q}U), \quad \partial_\eta V_2 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\xi(Q\bar{U} + \bar{Q}U). \tag{6.1}$$

6.1.1 Основные результаты

Основные результаты этого раздела сформулированы в теоремах 20 и 21. Обозначим через $\psi^{(j)}$ строку $\psi^{(j)} = [\psi^-_{j1}, \psi^+_{j2}](\xi, \eta, k)$. Здесь $\psi^\pm(\xi, \eta, k)$ – матриц-функции, введенные в разделе 4.1.1.

Теорема 20. *Пусть q_1 и q_2 такие, что $\partial^\alpha q_{1,2} \in L_1 \cap C^1$ для $|\alpha| \leq 3$. Если $h_1(\xi, \eta)$ и $h_2(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям $\partial^\alpha h_{1,2} \in L_1 \cap C^1$ для $|\alpha| \leq 4$, тогда h_1 и h_2 могут быть представлены в виде:*

$$h_1 = \frac{-1}{\pi}\langle \psi^{(1)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(1)}(\xi, \eta, k)\rangle_{\hat{h}},$$
$$h_2 = \frac{1}{\pi}\langle \psi^{(2)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(2)}(\xi, \eta, k)\rangle_{\hat{h}};$$

где

$$\hat{h}_1 = \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi, \eta, k), \phi_{(1)}(\xi, \eta, l))_h,$$
$$\hat{h}_2 = \frac{1}{4\pi}(\psi^-_{(2)}(\xi, \eta, k), \phi_{(2)}(\xi, \eta, l))_h.$$

Строки $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ – решения задач, сопряженных относительно формы $\langle \bullet, \bullet \rangle_s$ к нелокальным задачам Римана для строк $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ соответственно; столбцы $\phi_{(1)}$ и $\phi_{(2)}$ – то же относительно формы $(\bullet, \bullet)_q$ к интегральным уравнениям Вольтерра для столбцов $\psi^+_{(1)}$ и $\psi^-_{(2)}$.

Следующая теорема позволяет решать уравнение лДС-1 методом Фурье.

Теорема 21. *Пусть $q_1 = Q$, $q_2 = \kappa\bar{Q}$ где Q – решение уравнения ДС-1 с граничными условиями $g_1|_{\xi\to-\infty} = 0$, $\quad g_2|_{\eta\to-\infty} = 0$ и Q удовлетворяет условиям теоремы 20 при $t \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$. Если решение лДС-1 – гладкая и интегрируемая по ξ и η функция U, такая, что $\partial^\alpha U \in L_1 \cap C^1$ и $\partial^\alpha F \in L_1 \cap C^1$, для $|\alpha| \leq 4$ и $t \in [0, T_0]$, тогда*

$$\partial_t \hat{U}_1 = i(k^2 + l^2)\hat{U}_1 + \hat{F}_1.$$
$$\partial_t \hat{U}_2 = -i(k^2 + l^2)\hat{U}_2 + \hat{F}_2.$$

6.1.2 Сопряженные функции

Уравнение Вольтерра для $\psi^{+}_{(1)}$ имеют вид:

$$\psi^{+}_{(1)}(\xi,\eta,k) = E_{(1)}(ik\eta) + G_1[q]\psi^{+}_{(1)},$$

здесь $E_{(j)}(z)$ – j-ый столбец матрицы $E(z)$ и оператор $G_1[q]$:

$$G_1[q]\psi^{+}_{(1)} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\, q_1(\xi',\eta)\psi^{+}_{21}(\xi',\eta,k) \\ \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, q_2(\xi,\eta')\psi^{+}_{11}(\xi,\eta',k) \end{bmatrix}.$$

Сопряженный к G_1 относительно формы (4.8) определяется формулой:

$$(G_1[q]\mu,\chi)_q = (\mu, H_1[q]\chi)_q.$$

Построим оператор $H_1[q]$. Обозначим через $\mu(\xi,\eta)$ и $\chi(\xi,\eta)$ ограниченные вектор-функции при $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, тогда:

$$(G_1[q]\mu,\chi)_q = \int\int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta\Bigg[\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' q_1(\xi',\eta)\mu_2(\xi',\eta)q_2(\xi,\eta)\chi_1(\xi,\eta)+$$

$$+\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' q_2(\xi,\eta')\mu_1(\xi,\eta')q_1(\xi,\eta)\chi_2(\xi,\eta)\Bigg] =$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\eta\bigg(\frac{1}{2}\int_{\infty}^{\xi} d\xi'\mu_2(\xi',\eta)q_1(\xi',\eta)\int_{\xi}^{\infty} d\xi'\chi_1(\xi',\eta)q_2(\xi',\eta)\bigg)\bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} -$$

$$-\int\int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi q_1(\xi,\eta)\mu_2(\xi,\eta)\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\infty} d\xi'\chi_1(\xi',\eta)q_2(\xi',\eta) -$$

$$-\int_{\mathbb{R}} d\xi\bigg(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\mu_1(,\xi\eta')q_2(\xi,\eta')\int_{\eta}^{\infty} d\eta'\chi_2(\xi,\eta')q_1(\xi,\eta')\bigg)\bigg|_{\eta=-\infty}^{\eta=\infty} -$$

$$-\int\int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi q_2(\xi,\eta)\mu_1(\xi,\eta)\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty} d\eta'\chi_2(\xi,\eta')q_1(\xi,\eta')$$

Первое и третье выражения в последнем равенстве равны нулю. Выражение для оператора $H_1[q]\chi$:

$$H_1[q]\chi = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \int_{\xi}^{\infty} d\xi'\, q_1(\xi',\eta)\chi_2(\xi',\eta) \\ \int_{\eta}^{\infty} d\eta'\, q_2(\xi,\eta')\chi_1(\xi,\eta') \end{bmatrix}.$$

Столбец $\phi_{(1)}$, сопряженный к $\psi^{+}_{(1)}$ – решение уравнения:

$$\phi_{(1)}(\xi,\eta,k) = E_{(1)}(ik\xi) + H_1[q]\phi_{(1)}.$$

из уравнений Вольтерра для $\psi^-_{(2)}$:

$$\psi^-_{(2)}(\xi,\eta,k) = E_{(2)}(ik\eta) + G_2[q]\psi^-_{(2)},$$

здесь

$$G_2[q]\psi^-_{(2)} = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} -\int_\xi^\infty d\xi'\, q_1(\xi',\eta)\psi^-_{22}(\xi',\eta,k) \\ \int_{-\infty}^\eta d\eta'\, q_2(\xi,\eta')\psi^-_{12}(\xi,\eta',k) \end{array}\right].$$

Явное выражение для интегрального оператора, сопряженного к $G_2[q]$ относительно билинейной формы $(\bullet,\bullet)_q$, может быть получено, так же, как и для H_1. Приведем его вид:

$$H_2[q]\chi = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \int_\eta^\infty d\eta'\, q_1(\xi,\eta')\chi_2(\xi,\eta') \\ -\int_{-\infty}^\xi d\xi'\, q_2(\xi',\eta)\chi_1(\xi',\eta) \end{array}\right].$$

Столбец $\phi_{(2)}$ сопряженный к $\psi^-_{(2)}$ – решение уравнения:

$$\phi_{(2)} = E(ik\xi)\; +\; H_2[q]\phi_{(2)}.$$

Данные рассеяния $s_1(k,l)$ и $s_2(k,l)$ можно выразить через сопряженную-матриц-функцию $\phi(\xi,\eta,l)$. Это можно показать с помощью цепочки равенств:

$$s_1(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), E_{(1)}(il\xi))_q =$$

$$= (\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l) - H_1[q]\psi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q =$$

$$= (\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q - (G_1[q]\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q =$$

$$= (\psi^-_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q - (\psi^-_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q + (E_{(1)}(ik\eta), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q$$

Окончательно получается формула:

$$s_1(k,l) = (E_{(1)}(ik\eta), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_q.$$

Такие же вычисления для функции $s_2(k,l)$ дают выражение:

$$s_2(k,l) = (E_{(2)}(ik\xi), \phi_{(2)}(\xi,\eta,l))_q.$$

Чтобы написать нелокальную задачу Римана, связанную с сопряженными функциями $\psi(\xi,\eta,l)$, введем еще одну матриц-функцию – решение уравнений Вольтерра:

$$
\varphi_{11}(\xi,\eta,l)=\exp(il\xi)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta' q_1(\xi,\eta')\varphi_{21}(\xi,\eta',l),
$$
$$
\varphi_{21}(\xi,\eta,l)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}d\xi' q_2(\xi',\eta)\varphi_{11}(\xi',\eta,l), \tag{6.2}
$$

Второй столбец матрицы φ удовлетворяет уравнению

$$
\varphi_{12}(\xi,\eta,l)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta' q_1(\xi,\eta')\varphi_{22}(\xi,\eta',l),
$$
$$
\varphi_{22}(\xi,\eta,l)=\exp(-il\eta)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\xi}d\xi' q_2(\xi',\eta)\varphi_{12}(\xi',\eta,l). \tag{6.3}
$$

Столбцы $\phi_{(1)}(\xi,\eta,l)$ и $\varphi_{(2)}(\xi,\eta,l)$ аналитичны при $\Im(l)>0$, а столбцы $\phi_{(2)}(\xi,\eta,l)$ и $\varphi_{(1)}(\xi,\eta,l)$ – при $\Im(l)<0$. Это можно показать так же, как было показано для столбцов матриц $\psi^{\pm}$ в пункте 4.1.1.

В результате выкладок, похожих на проделанные в пункте 4.1.1, получим:

$$
\phi_{11}(\xi,\eta,l)-\varphi_{11}(\xi,\eta,l)=-\int_{-\infty}^{\infty}dk s_1(k,l)\varphi_{12}(\xi,\eta,k),
$$
$$
\phi_{12}(\xi,\eta,l)-\varphi_{12}(\xi,\eta,l)=-\int_{-\infty}^{\infty}dk s_2(k,l)\varphi_{11}(\xi,\eta,k).
$$

Опять использовав формулы Сохоцкого, получим задачу Римана для строки $\varphi^{(1)}(\xi,\eta,l)$:

$$
\varphi_{11}(\xi,\eta,l)=\exp(il\xi)-\exp(il\xi)\left(\exp(-il\xi)\int_{-\infty}^{\infty}dk\, s_1(k,l)\varphi_{12}(\xi,\eta,k)\right)^{-},
$$
$$
\varphi_{12}(\xi,\eta,l)=-\exp(-il\eta)\left(\exp(il\eta)\int_{-\infty}^{\infty}dk\, s_2(k,l)\varphi_{11}(\xi,\eta,k)\right)^{+}.
$$

Для строки $\varphi^{(2)}(\xi,\eta,l)$:

$$
\varphi_{21}(\xi,\eta,l)=-\exp(il\xi)\left(\exp(-il\xi)\int_{-\infty}^{\infty}dk\, s_1(k,l)\varphi_{22}(\xi,\eta,k)\right)^{-},
$$
$$
\varphi_{22}(\xi,\eta,l)=\exp(-il\eta)-\exp(-il\eta)\left(\exp(il\eta)\int_{-\infty}^{\infty}dk\, s_2(k,l)\varphi_{21}(\xi,\eta,k)\right)^{+}.
$$

Таким образом решения сопряженной задачи также являются решениями некоторой задачи Римана.

Теперь выведем задачу, сопряженную нелокальной задаче Римана для функций $\psi^{\pm}$ относительно второй билинейной формы. Рассмотрим задачу Римана для строки $\psi^{(1)} = [\psi_{11}^{-}, \psi_{12}^{+}]$:

$$\psi^{(1)} = E^{(1)}(ik\eta) + S[s]\psi^{(1)}.$$

Здесь $E^{(1)}(z)$ – первая строка матрицы $E(z)$, оператор $S_1[s]$ – определяется формулой:

$$S[s]\psi^{(1)} = \Bigg[\exp(ik\eta)\Bigg(\exp(-ik\eta)\int_{-\infty}^{\infty} dl s_1(k,l)\psi_{12}^{+}(\xi,\eta,l)\Bigg)^{-},$$
$$\exp(-ik\xi)\Bigg(\exp(ik\xi)\int_{-\infty}^{\infty} dl s_2(k,l)\psi_{11}^{-}(\xi,\eta,l)\Bigg)^{+}\Bigg].$$

Выведем оператор, сопряженный оператору $S[s]$ относительно билинейной формы $\langle \bullet, \bullet \rangle_s$. Пусть $\mu(\xi,\eta,k)$ и $\chi(\xi,\eta,k)$ – строки, состоящие из пары элементов – функций, ограниченных при $k,\xi,\eta \in \mathbb{R}$ и аналитических по k в окрестности вещественной прямой.

$$\langle S[s]\mu, \chi\rangle_s = \int\int_{\mathbb{R}^2} dk\, dl \Bigg[\chi_1(\xi,\eta,l)s_2(k,l)\exp(ik\eta)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{-k+(k'+i0)}\Bigg(\exp(-ik'\eta)\int_{-\infty}^{\infty} dl' s_1(k',l')\mu_2(\xi,\eta,l')\Bigg)+$$
$$+\chi_2(\xi,\eta,l)s_1(k,l)\exp(-ik\xi)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{-k+(k'-i0)}\Bigg(\exp(ik'\xi)\int_{-\infty}^{\infty} dl' s_2(k',l')\mu_1(\xi,\eta,l')\Bigg)\Bigg] =$$

Теперь осталось поменять порядок интегрирования – интегралы по k,l сделать внутренними, а интегралы по k',l' – внешними:

$$\langle S[s]\mu, \chi\rangle_s = \int\int_{\mathbb{R}^2} dk'\, dl' \Bigg[s_1(k',l')\mu_2(\xi,\eta,l')\exp(-ik'\eta)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k'-(k-i0)}\Bigg(\exp(ik\eta)\int_{-\infty}^{\infty} dl\chi_1(\xi,\eta,l)s_2(k,l)\Bigg)+$$
$$+s_2(k',l')\mu_1(\xi,\eta,l')\exp(ik'\xi)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k' - (k + i0)} \left(\exp(-ik\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dl \chi_2(\xi, \eta, l) s_1(k, l) \right) \Big] = \langle \mu, T[s]\chi \rangle_s.$$

Здесь

$$T[s]\chi = \Bigg[-\exp(il\xi) \Big(\exp(-il\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk s_1(k, l) \chi_2(\xi, \eta, k) \Big)^{-},$$
$$-\exp(-il\eta) \Big(\exp(il\eta) \int_{-\infty}^{\infty} dk s_2(k, l) \chi_1(\xi, \eta, k) \Big)^{+} \Bigg],$$

Строка, сопряженная к $\psi^{(1)}$ относительно второй билинейной формы (4.15) удовлетворяет задаче Римана:

$$\varphi^{(1)}(\xi, \eta, l) = E^{(1)}(il\xi) + T[s]\varphi^{(1)}.$$

Таким же образом можно определить строку $\varphi^{(2)}$, сопряженную к $\psi^{(2)} = [\psi^{-}_{21}, \psi^{-}_{22}]$.

$$\varphi^{(2)} = E^{(2)}(il\eta) + T[s]\varphi^{(2)}.$$

То есть, решения систем уравнений (6.2) и (6.3) являются и решениями задачи, сопряженной относительно второй билинейной формы.

6.1.3 Вариация данных рассеяния

Здесь получены уравнения Вольтерра для функций, сопряженных к $\psi^{+}_{(1)}$ и $\psi^{-}_{(2)}$ относительно первой билинейной формы (4.8). Выводятся формулы для вариации потенциалов и данных рассеяния.

Пусть δq_i – инфинитизимальная вариация потенциала. Уравнение для вариации $\psi^{+}_{(1)}$ имеет вид:

$$\delta\psi^{+}_{(1)} = G_1[q]\delta\psi^{+}_{(1)} + G_1[\delta q]\psi^{+}_{(1)}. \tag{6.4}$$

Вычислим билинейную форму:

$$(\delta\psi^{+}_{(1)}(\xi, \eta, k), \phi_{(1)}(\xi, \eta, l))_q = (G_1[q]\delta\psi^{+}_{(1)}, \phi_{(1)})_q + (G_1[\delta q]\psi^{+}_{(1)}, \phi_{(1)})_q.$$

После преобразований получим:

$$(\psi^{+}_{(1)}(\xi, \eta, k), \phi_{(1)}(\xi, \eta, l))_{\delta q} = (\delta\psi^{+}_{(1)}(\xi, \eta, k), E_{(1)}(il\xi))_q +$$
$$+(\psi^{+}_{(1)}(\xi, \eta, k), E_{(1)}(il\xi))_{\delta q}.$$

С другой стороны можно вычислить вариацию $s_1(k,l)$:

$$\delta s_1(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\delta\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), E_{(1)}(il\xi))_q +$$

$$+\frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), E_{(1)}(il\xi))_{\delta q}.$$

Это дает:

$$\delta s_1(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_{\delta q}. \tag{6.5}$$

Таким образом, получена формула, связывающая вариации потенциалов с вариацией функции $s_1(k,l)$.

Вторая формула для вариации данных рассеяния получается подобным образом. Формула для вариации функции $s_2(k,l)$:

$$\delta s_2(k,l) = \frac{1}{4\pi}(\psi^-_{(2)}(\xi,\eta,k), \phi_{(2)}(\xi,\eta,l))_{\delta q}. \tag{6.6}$$

Теперь выведем формулы для вычисления вариации потенциала по вариации данных рассеяния. На этом пути нам понадобятся функции, сопряженные относительно второй билинейной формы (4.15).

Формулы для вычисления потенциалов приведены выше (4.16), (4.17). Пусть $\delta s_1(k,l)$ и $\delta s_2(k,l)$ – инфинитизимальные вариации данных рассеяния. Из (4.16) вариация потенциала имеет вид:

$$\delta q_1 = \frac{-1}{\pi}\langle\delta\psi^{(1)}(\xi,\eta,l), E^{(1)}(ik\xi)\rangle_s - \frac{1}{\pi}\langle\psi^{(1)}(\xi,\eta,l), E^{(1)}(ik\xi)\rangle_{\delta s}.$$

Уравнения для вариации строки $\psi^{(1)}$:

$$\delta\psi^{(1)}(\xi,\eta,l) = S[s]\delta\psi^{(1)} + S[\delta s]\psi^{(1)}.$$

Вычислим билинейную форму:

$$\langle\delta\psi^{(1)}(\xi,\eta,l), \varphi^{(1)}(\xi,\eta,k)\rangle_s = \langle S[s]\delta\psi^{(1)}, E^{(1)}(ik\xi)\rangle_s +$$

$$\langle\psi^{(1)}(\xi,\eta,l), E^{(1)}(ik\xi)\rangle_{\delta s}.$$

Из (4.16) после преобразований получим:

$$\delta q_1 = \frac{-1}{\pi}\langle\psi^{(1)}(\xi,\eta,l), \varphi^{(1)}(\xi,\eta,k)\rangle_{\delta s}. \tag{6.7}$$

Формула для вариации q_2:

$$\delta q_2 = \frac{1}{\pi}\langle \psi^{(2)}(\xi,\eta,l), \varphi^{(2)}(\xi,\eta,k)\rangle_{\delta s}. \tag{6.8}$$

Формулы (6.5) и (6.6) определяют вариации потенциалов по вариации данных рассеяния. Формулы для вычисления вариаций данных рассеяния по вариациям потенциалов – (6.7), (6.8). Эти четыре соотношения были выведены формальным путем и, вообще говоря, могут и не определять взаимно обратные отображения. Изучение их будет продолжено в следующих параграфах.

6.1.4 Финитные потенциалы

В этой части доказано, что формулы (6.5), (6.6) и (6.7), (6.8) определяют прямое и обратное преобразования типа преобразования Фурье.

Обозначим $\delta q_i = f_i$, $i = 1, 2$. Композиция формул (6.7), (6.8) и (6.5), (6.6):

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4\pi}(\psi^{+}_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_f,$$
$$\hat{f}_2 = \frac{1}{4\pi}(\psi^{-}_{(2)}(\xi,\eta,k), \phi_{(2)}(\xi,\eta,l))_f;$$
$$h_1 = \frac{-1}{\pi}\langle \psi^{(1)}(\xi,\eta,l), \varphi^{(1)}(\xi,\eta,k)\rangle_{\hat{f}},$$
$$h_2 = \frac{1}{\pi}\langle \psi^{(2)}(\xi,\eta,l), \varphi^{(2)}(\xi,\eta,k)\rangle_{\hat{f}}.$$

Наша цель – показать эквивалентность $h_i \equiv f_i$. Доказательство основано на двух свойствах элементов матриц ϕ и ψ. Первое свойство– аналитичность по $k, l \in \mathbb{C}$, если q_1 и q_2 – имеют финитный носитель. Аналитичность следует из уравнений Вольтерра. Второе свойство – асимптотическое поведение ϕ и ψ при $|k|$ или $|l| \to \infty$.

Асимптотики $\psi^{\pm}_{(1)}$ и $\psi^{\mp}_{(2)}$ получены в [109]:

$$\psi^{\pm}_{(1)}(\xi,\eta,k) = \exp(ik\eta)\times$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \frac{-i}{4}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' q_1(\xi',\eta) q_2(\xi',\eta) \\ \frac{i}{2}q_2 \end{bmatrix} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\right).$$

$$\psi^{\mp}_{(2)}(\xi,\eta,k) = \exp(-ik\xi)\times$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \frac{-i}{2}q_1 \\ \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' q_1(\xi,\eta')q_2(\xi,\eta') \end{bmatrix} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\right).$$

Столбцы $\phi_{(1)}$ и $\phi_{(2)}$ имеют похожее асимптотическое поведение:

$$\phi_{(1)}(\xi,\eta,k) = \exp(ik\xi)\times$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \frac{-i}{4}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' q_1(\xi,\eta')q_2(\xi,\eta') \\ \frac{-i}{2}q_2 \end{bmatrix} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\right).$$
$$\phi_{(2)}(\xi,\eta,k) = \exp(-ik\eta)\times$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \frac{i}{2}q_1 \\ \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' q_1(\xi',\eta)q_2(\xi',\eta) \end{bmatrix} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\right).$$

Построим асимптотику $\varphi^{(1)}$ при $|k|\to\infty$. Главный член и поправка имеют вид:

$$\varphi^{(1)}(\xi,\eta,k) = \Bigg(\Big[\exp(ik\xi), \quad 0\Big] +$$
$$+\frac{1}{k}\Big[\frac{1}{2i\pi}\exp(ik\xi)\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dl\, s_1(l,k')\varphi_2^{(1)}(\xi,\eta,l)\exp(ik'\xi),$$
$$\frac{1}{2i\pi}\exp(-ik\eta)\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dl\, s_2(l,k')\varphi_1^{(1)}(\xi,\eta,l)\exp(ik'\eta)\Big] + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$

С другой стороны :

$$q_1 = \frac{-1}{\pi}\langle E^{(1)}(il\eta), \varphi^{(1)}(\xi,\eta,k)\rangle_s,$$
$$\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, q_1(\xi,\eta')q_2(\xi,\eta') =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dl\, dk\, s_2(k,l)\exp(ik\xi)\psi^{-}_{21}(\xi,\eta,l).$$

Вторая из этих формул получена в [109]. Это дает:

$$\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, q_1(\xi,\eta')q_2(\xi,\eta') =$$
$$= \frac{2}{\pi}\langle\psi^{(2)}(\xi,\eta,l), E^{(1)}(ik\xi)\rangle_s = \frac{2}{\pi}\langle E^{(2)}(il\eta, \varphi^{(1)}(\xi,\eta,k)\rangle_s.$$

Асимптотика $\varphi^{(1)}$ при $|k| \to \infty$ имеет вид:

$$\varphi^{(1)}(\xi,\eta,k) = \Big[\exp(ik\xi), \quad 0\Big] +$$

$$+\frac{1}{k}\Big[\frac{\exp(ik\xi)}{4i}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, q_1(\xi,\eta')q_2(\xi,\eta), \quad \frac{\exp(-ik\eta)}{-2i}q_1\Big] + O(\frac{1}{k^2}).$$

Таким же образом можно получить асимптотику $\varphi^{(1)}$ при $|k| \to \infty$:

$$\varphi^{(2)}(\xi,\eta,k) = \Big[0, \quad \exp(-ik\eta)\Big] +$$

$$+\frac{1}{k}\Big[\frac{\exp(ik\xi)}{2i}q_2, \quad \frac{\exp(-ik\eta)}{-4i}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\, q_1(\xi',\eta)q_2(\xi',\eta)\Big] + O(\frac{1}{k^2}).$$

Докажем эквивалентность $h_i = f_i$. Композиция формул (6.7) и (6.5), (6.6) дает:

$$h_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, dl \Bigg(\psi_1^{(1)}(\xi,\eta,l)\varphi_1^{(1)}(\xi,\eta,k)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi'\, d\eta' \times$$

$$\times\Big[\psi^1_{(2)}(\xi',\eta',k)\phi^1_{(2)}(\xi',\eta',l)f_2(\xi',\eta') +$$

$$+\psi^2_{(2)}(\xi',\eta',k)\phi^2_{(2)}(\xi',\eta',l)f_1(\xi',\eta')\Big] +$$

$$+\psi_2^{(1)}(\xi,\eta,l)\varphi_2^{(1)}(\xi,\eta,k)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi'\, d\eta' \times$$

$$\times\Big[\psi^1_{(1)}(\xi',\eta',k)\phi^1_{(1)}(\xi',\eta',l)f_2(\xi',\eta') +$$

$$+\psi^2_{(1)}(\xi',\eta',k)\phi^2_{(1)}(\xi',\eta',l)f_1(\xi',\eta')\Big]\Bigg).$$

Представим интегралы по k и l как интегралы несобственные интегралы в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, dl\,(\dots) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} dk\, dl\,(\dots).$$

Переставим порядок интегрирования по ξ' и η' с интегрированием по k и l. Подынтегральная функция аналитична по k и l в комплексной плоскости: k и $l \in \mathbb{C}$. Поэтому можно преобразовать пути интегрирования по k и l к большим полуокружностям в верхней и нижней полуплоскостях комплексных плоскостей параметров k, l. Обозначим эти пути интегрирования C_R^+ или C_R^-. Представим интегралы по ξ' и η' как сумму интегралов по $\xi' \in (-\infty, \xi]$, $\eta' \in (-\infty, \eta]$ и $\xi' \in (\xi, \infty)$, $\eta' \in (\eta, \infty)$. Преобразуем пути интегрирования по k и l к C_R^+ или C_R^- соответственно. Подставим асимптотики подынтегральных функций при $|k| \to \infty$ $|l| \to \infty$. В результате получим:

$$h = \frac{1}{4\pi} \lim_{R\to\infty} \Bigg[\Bigg(\int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{\eta} d\xi' d\eta' f_2(\xi',\eta') \int_{C_R^+} dk \int_{C_R^+} dl +$$

$$\int_{\xi}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty} d\xi' d\eta' f_2(\xi',\eta') \int_{C_R^-} dk \int_{C_R^-} dl\Bigg) \times$$

$$\Big[\frac{\exp(il(\eta-\eta'))}{l}\frac{i}{2}q_1(\xi',\eta')\frac{\exp(ik(\xi-\xi'))}{k}\frac{-i}{2}q_1(\xi',\eta')\Big] +$$

$$\Bigg(\int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{\eta} d\xi' d\eta' f_2(\xi',\eta') \int_{C_R^+} dk \int_{C_R^+} dl +$$

$$\int_{\xi}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty} d\xi' d\eta' f_2(\xi',\eta') \int_{C_R^-} dk \int_{C_R^-} dl\Bigg) \times$$

$$\Big[\frac{\exp(il(\xi'-\xi))}{l}\frac{-i}{2}q_1(\xi,\eta)\frac{\exp(ik(\eta'-\eta))}{k}\frac{i}{2}q_1(\xi,\eta)\Big] +$$

$$\Bigg(\int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{\eta} d\xi' d\eta' f_1(\xi',\eta') \int_{C_R^+} dk \int_{C_R^+} dl +$$

$$\int_{\xi}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty} d\xi' d\eta' f_1(\xi',\eta') \int_{C_R^-} dk \int_{C_R^-} dl\Bigg) \times$$

$$f_1(\xi',\eta') \int_{C_R} dk \int_{C_R} dl \Big[\Big(1 + \frac{1}{l}\frac{-i}{4}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi'' q_1(\xi'',\eta) q_2(\xi'',\eta)\Big)\exp(il\eta) \times$$

$$\Big(1 + \frac{1}{k}\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta''\, q_1(\xi,\eta'') q_2(\xi,\eta'')\Big)\exp(ik\xi) \times$$

$$\Big(1 + \frac{1}{k}\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\eta'} d\eta''\, q_1(\xi',\eta'') q_2(\xi',\eta'')\Big)\exp(-ik\xi') \times$$

$$\Big(1 + \frac{1}{l}\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\xi'} d\xi''\, q_1(\xi'',\eta') q_2(\xi'',\eta')\Big)\exp(-il\eta')\Big]\Bigg].$$

Затем трансформируем пути интегрирования обратно на вещественные оси $\Im(l) = 0$ и $\Im(k) = 0$. Это дает:

$$h = \frac{1}{4\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \times$$

$$\int_{-R}^{R} dk \int_{-R}^{R} dl\, f_1(\xi', \eta') \exp(il(\eta - \eta')) \exp(ik(\xi - \xi')) = f_1.$$

Утверждение об эквивалентности доказано.

Теорема 22. *Пусть q_1 и q_2 – гладкие функции с финитным носителем. Если f_1 и f_2 гладкие интегрируемые функции переменных $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, тогда f_1 и f_2 могут быть представлены в форме:*

$$f_1 = \frac{-1}{\pi} \langle \psi^{(1)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(1)}(\xi, \eta, k) \rangle_{\hat{f}},$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \langle \psi^{(2)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(2)}(\xi, \eta, k) \rangle_{\hat{f}},$$

где

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4\pi} (\psi^{+}_{(1)}(\xi, \eta, k), \phi_{(1)}(\xi, \eta, l))_f,$$

$$\hat{f}_2 = \frac{1}{4\pi} (\psi^{-}_{(2)}(\xi, \eta, k), \phi_{(2)}(\xi, \eta, l))_f.$$

6.1.5 Теорема об интегральном преобразовании

В предыдущей части была доказана теорема о представлении функций из $L_1 \cap C^1$ в виде интеграла по произведениям функций, связанных с системой Дирака, когда $q_{1,2}$ имеют финитные носители. В этом разделе показано, что такое представление возможно для потенциалов более широкого класса, правда при этом приходится налагать некоторые дополнительные ограничения на раскладываемые функции.

Для доказательства теоремы 20 мы аппроксимируем потенциалы q_1 и q_2 потенциалами $\overset{N}{q_1}$ и $\overset{N}{q_2}$ с конечным носителем. Для $\varepsilon > 0$ примем $N(\varepsilon) > 0$ такие, что $||\partial^\alpha \overset{N}{q}_{1,2} - \partial^\alpha q_{1,2}||_{L_1} = O(\varepsilon)$, где $|\alpha| \leq 3$ и $\overset{N}{q}_{1,2} = q_{1,2}$ для $\xi^2 + \eta^2 \leq N(\varepsilon)$; и $\overset{N}{q}_{1,2} = 0$ для $\xi^2 + \eta^2 > 2N(\varepsilon)$. Обозначим погрешность аппроксимации $\overset{\varepsilon}{q}_{1,2} = q_{1,2} - \overset{N}{q}_{1,2}$. Всюду в этой части верхний символ N используется для решений задачи Гурса с потенциалами $\overset{N}{q}_{1,2}$. Верхним символом ε отмечаются функции, относящиеся к погрешности аппроксимации $\overset{\varepsilon}{q}_{1,2}$.

Лемма 14. *: $|| \overset{N}{\psi}{}^{\pm}_{ij} - \psi^{\pm}_{ij}||_{C^3} = O(\varepsilon)$, для $i, j = 1, 2$. Здесь $\overset{N}{\psi}{}^{\pm}_{ij}$ – элементы матрицы – решения задачи Гурса с потенциалами $\overset{N}{q}_1$ и $\overset{N}{q}_2$.*

Доказательство. Обозначим $\chi^{\pm}$ выражение

$$\chi^{\pm}(\xi, \eta, k) = \begin{pmatrix} \exp(-ik\eta) & 0 \\ 0 & \exp(ik\xi) \end{pmatrix} \psi^{\pm}(\xi, , \eta, k). \tag{6.9}$$

Представим матрицу $\chi^{\pm}$ в виде $\chi^{\pm} = \overset{N}{\chi}{}^{\pm} + \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}$. Здесь $\overset{N}{\chi}{}^{\pm}$ – такое же выражение через $\overset{N}{\psi}$ как (6.9). Уравнения Вольтерра для столбца $\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{(1)}$ имеют вид:

$$\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{(1)} = \mathcal{G}_1[\overset{\varepsilon}{q}]\ \overset{N}{\chi}{}^{+}_{(1)} + \mathcal{G}_1[q]\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{(1)}, \tag{6.10}$$

где

$$\mathcal{G}_1[q]\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\, q_1(\xi', \eta)\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{21}(\xi', \eta, k) \\ \int_{\eta}^{\infty} d\eta'\, q_2(\xi, \eta')\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{11}(\xi, \eta', k) \exp(ik(\eta' - \eta)) \end{pmatrix}.$$

Ряды Неймана для этой системы сходятся и $|\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{11}| + |\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{21}| = O(\varepsilon)$ для $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$. Такие же оценки справедливы для производных: $|\partial^{\alpha}\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{11}| + |\partial^{\alpha}\ \overset{\varepsilon}{\chi}{}^{+}_{21}| = O(\varepsilon)$ for $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$ при $|\alpha| \le 3$.

Подобные результаты можно получить для $\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}_{(2)}$ и $\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{-}_{(1)}$. Лемма доказана.

Ниже будет использоваться асимптотическое поведение $\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}$ при $|k| \to \infty$.

Лемма 15. *: При $|k| \to \infty$ асимптотика $\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}$ имеет вид*

$$\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}_{(1)} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\, (\overset{\varepsilon}{q}_1\ \overset{N}{q}_2 + \overset{\varepsilon}{q}_2\ q_1) \\ \frac{i}{2}\ \overset{\varepsilon}{q}_2 \end{pmatrix} + O(k^{-2}). \tag{6.11}$$

Эта асимптотика равномерна при $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Остаток дифференцируем по ξ:

$$\overset{\varepsilon}{\chi}{}^{\pm}_{(2)} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{-i}{2}\ \overset{\varepsilon}{q}_1 \\ \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\xi} d\eta'\, (\overset{\varepsilon}{q}_2\ \overset{N}{q}_1 + \overset{\varepsilon}{q}_1\ q_2) \end{pmatrix} + O(k^{-2}). \tag{6.12}$$

Формула равномерно пригодна при $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Остаток дифференцируем по η.

Асимптотика может быть построена также, как и асимптотика $\psi^{\pm}$.

Перейдем к доказательству теоремы 20. Обозначим

$$\overset{N}{f}_i = \frac{1}{4\pi} (\overset{N}{\psi}_{(i)} (\xi, \eta, k), \overset{N}{\phi}_{(i)} (\xi, \eta, l))_f .$$

Представим f_1 как

$$f_1 = \frac{-1}{\pi} < \overset{N}{\psi}^{(1)}(\xi, \eta, l), \overset{N}{\varphi}^{(1)}(\xi, \eta, k) >_{\overset{N}{f}} .$$

Оценим разность $f_1 - h_1$, где

$$h_1 = \frac{-1}{\pi} < \psi^{(1)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(1)}(\xi, \eta, k) >_{\hat{f}} .$$

$$\begin{aligned} f_1 - h_1 = {} & \tfrac{-1}{\pi} < \overset{N}{\psi}^{(1)}(\xi, \eta, l), \overset{N}{\varphi}^{(1)}(\xi, \eta, k) >_{\overset{N}{f}} \\ & + \tfrac{1}{\pi} < \psi^{(1)}(\xi, \eta, l), \varphi^{(1)}(\xi, \eta, k) >_{\hat{f}} \\ = {} & \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, dl \, \Big[\overset{N}{f}_2 (k, l) \\ & \times \big(\overset{N}{\psi}{}_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \overset{N}{\varphi}_{11} (\xi, \eta, k) - \psi_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \varphi_{11}(\xi, \eta, k) \big) \\ & + \big(\overset{N}{f}_2 (k, l) - \hat{f}_2(k, l) \big) \psi_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \varphi_{11}(\xi, \eta, k) \\ & + \overset{N}{f}_1 (k, l) \big(\overset{N}{\psi}{}_{12}^{+}(\xi, \eta, l) \overset{N}{\varphi}_{12} (\xi, \eta, k) - \psi_{12}^{+}(\xi, \eta, l) \varphi_{12}(\xi, \eta, k) \big) \\ & + \big(\overset{N}{f}_1 (k, l) - \hat{f}_1(k, l) \big) \psi_{12}^{+}(\xi, \eta, l) \varphi_{12}(\xi, \eta, k) \Big]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Рассмотрим различные слагаемые и оценим их по-отдельности. Обозначим

$$\begin{aligned} I_1 = {} & \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, dl \; \overset{N}{f}_2 (k, l) \\ & \times \big(\overset{N}{\psi}{}_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \overset{N}{\varphi}_{11} (\xi, \eta, k) - \psi_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \varphi_{11}(\xi, \eta, k) \big). \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что

$$| \overset{N}{\psi}{}_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \overset{N}{\varphi}_{11} (\xi, \eta, k) - \psi_{11}^{-}(\xi, \eta, l) \varphi_{11}(\xi, \eta, k) | = O(\varepsilon).$$

Чтобы показать, что $I_1 = O(\varepsilon)$ достаточно, что $\overset{N}{f}_2 (k, l) \in L_1$.

Лемма 16. *:* $\overset{N}{f}_2(k,l) \in L_1$.

Доказательство: Построим асимптотику $\overset{N}{f}_2(k,l)$ при $|k| \to \infty$ равномерную при $l \in \mathbb{R}$ и асимптотику $\overset{N}{f}_2(k,l)$ при $|l| \to \infty$ равномерную при $k \in \mathbb{R}$:

$$\overset{N}{f}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta \times$$

$$\times\Big[\big(\frac{-1}{2k}\overset{N}{q}_1(\xi,\eta) + O(k^{-2})\big)\exp(-ik\xi)\overset{N}{\phi}_{12}(\xi,\eta,l) +$$

$$\big(1+\frac{i}{4k}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\, \overset{N}{q}_1(\xi,\eta')\overset{N}{q}_2(\xi,\eta') + O(k^{-2})\big)\exp(-ik\xi)\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l)\Big].$$

Представим интеграл как сумму интегралов. Проинтегрируем члены, с асимптотикой $O(k^{-1})$ при $|k| \to \infty$ по частям по ξ. Дважды проинтегрируем по частям по ξ член

$$I_1' = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, f_2(\xi,\eta)\exp(-ik\xi)\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l).$$

В результате получим

$$\overset{N}{f}_2 = O(k^{-2}), \quad \text{при} \quad |k| \to \infty \quad \text{равномерно при} \quad l \in \mathbb{R}.$$

Таким же образом можно показать

$$\overset{N}{f}_2 = O(l^{-2}), \quad \text{при} \quad |l| \to \infty \quad \text{равномерно при} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Следовательно $\overset{N}{f}_2 \in L_1$. Лемма доказана.

В результате $I_1 = O(\varepsilon)$.

Рассмотрим еще один член из формулы (6.13):

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, dl\, \psi_{11}^{-}(\xi,\eta,l)\varphi_{11}(\xi,\eta,k)(\overset{N}{f}_2(k,l) - \hat{f}_2(k,l)).$$

Лемма 17. *:* $||\overset{N}{f}_2 - \hat{f}_2(k,l)||_{L_1} = O(\varepsilon)$.

Доказательство:

$$\overset{N}{f}_2(k,l) - \hat{f}_2(k,l) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, \big[f_2(\xi,\eta)$$

$$
\begin{aligned}
&\times\big[\big(\overset{N}{\psi}_{12}(\xi,\eta,k)-\psi_{12}(\xi,\eta,k)\big)\overset{N}{\phi}_{12}(\xi,\eta,l)\\
&+\big(\overset{N}{\phi}_{12}(\xi,\eta,l)-\phi_{12}(\xi,\eta,l)\big)\overset{N}{\psi}_{12}(\xi,\eta,k)\big]\\
&+f_1(\xi,\eta)\big[\big(\overset{N}{\psi}_{22}(\xi,\eta,k)-\psi_{22}(\xi,\eta,k)\big)\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l)\\
&+\big(\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l)-\phi_{22}(\xi,\eta,l)\big)\overset{N}{\psi}_{22}(\xi,\eta,k)\big]\big].
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Представим интеграл как сумму интегралов по ξ и η. Рассмотрим асимптотику одного из слагаемых при $|k|\to\infty$:

$$
\begin{aligned}
J_1&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,f_1(\xi,\eta)\big(\overset{N}{\psi}_{22}(\xi,\eta,k)-\psi_{22}(\xi,\eta,k)\big)\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l)\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,f_1(\xi,\eta)\big[\frac{i}{4k}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta'\big(\overset{\varepsilon}{q}_2(\xi,\eta')\overset{N}{q}_1(\xi,\eta')\\
&+\overset{\varepsilon}{q}_1(\xi,\eta')\overset{N}{q}_2(\xi,\eta')\big)+O(k^{-2})\big]\exp(ik\xi)\overset{N}{\phi}_{22}(\xi,\eta,l).
\end{aligned}
$$

После интегрирования по частям по ξ получим

$$J_1=O(\varepsilon)O(k^{-2})\quad\text{при}\quad |k|\to\infty,\ l\in\mathbb{R}.$$

Таким же образом можно получить

$$J_1=O(\varepsilon)O(l^{-2})\quad\text{при}\quad |l|\to\infty,\ k\in\mathbb{R}.$$

Более того , $J_1=O(\varepsilon)$ при $k,l\in\mathbb{R}$. Это следует из леммы 14. В результате получим

$$||J_1||_{L_1}=O(\varepsilon).$$

Таким же образом можно оценить остаточные слагаемые в (6.14). В результате получено утверждение леммы 17.

Из леммы 17 следует $I_2=O(\varepsilon)$. Другие слагаемые из формулы (6.13) оцениваются так же. В результате получим

$$|f_1-h_1|=O(\varepsilon)\quad\text{при}\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Такая же формула справедлива для f_2 и h_2:

$$|f_2-h_2|=O(\varepsilon)\quad\text{при}\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Пусть $\varepsilon\to 0$. Тогда получим утверждение теоремы 20.

6.1.6 Временная эволюция данных рассеяния

Здесь изучается временная эволюция вариаций данных рассеяния в специальном случае, когда $q_1 = Q, \quad q_2 = \kappa\bar{Q}$, и Q – решение уравнения ДС-1 с краевыми условиями $g_1|_{\xi\to-\infty} = 0$ and $g_2|_{\eta\to-\infty} = 0$.

Вариации данных рассеяния

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{4\pi}(\psi^-_{(2)}(\xi,\eta,k), \phi_{(2)}(\xi,\eta,l))_U,$$

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_U.$$

Здесь $U_(\xi,\eta,t)$ – решение линеаризованных уравнений лДС-1 (6.1) и $U_2 = \kappa\bar{U}_1$. В этом случае $\psi^+_{(1)} = \psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k,t)$ и они являются решениями системы уравнений [106]

$$\partial_t\psi^+_{(1)} = ik^2\psi^+_{(1)} + i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\partial_\xi - \partial_\eta)^2\psi^+_{(1)}$$

$$+i\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}(\partial_\xi - \partial_\eta)\psi^+_{(1)} + \begin{pmatrix} ig_1 & -i\partial_\eta q_1 \\ i\partial_\xi q_2 & -ig_2 \end{pmatrix}\psi^+_{(1)}. \tag{6.15}$$

Можно показать, что $\phi_{(1)}$ удовлетворяет системе

$$\partial_t\phi_{(1)} = ik^2\phi_{(1)} + i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\partial_\eta - \partial_\xi)^2\phi_{(1)} -$$

$$-i\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}(\partial_\eta - \partial_\xi)\phi_{(1)} + \begin{pmatrix} ig_2 & i\partial_\xi q_1 \\ -i\partial_\eta q_2 & -ig_1 \end{pmatrix}\phi_{(1)}. \tag{6.16}$$

Возьмем производную функции $\hat{U}_1$ по t:

$$\partial_t\hat{U}_1 = \frac{1}{4\pi}(\partial_t\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_U +$$

$$+\frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \partial_t\phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_U + \frac{1}{4\pi}(\psi^+_{(1)}(\xi,\eta,k), \phi_{(1)}(\xi,\eta,l))_{\partial_t U}.$$

Дальше, заменяя производную от $\psi^+_{(1)}$ согласно (6.15), производную от $\phi_{(1)}$ согласно (6.16) и производные от U_1 и U_2 согласно (6.1), получим интегралы, содержащие только производные по пространственным переменным. Затем с помощью довольно громоздких вычислений интегралов по частям можно избавиться от производных функций ψ и ϕ. В результате получим:

$$\partial_t \hat{U}_1 = i(k^2 + l^2)\hat{U}_1 + \hat{F}_1.$$

Так же можно получить:

$$\partial_t \hat{U}_2 = -i(k^2 + l^2)\hat{U}_2 + \hat{F}_2.$$

Теорема 21 доказана.

6-2 Возмущение дромиона

Здесь строится асимптотическое решение возмущенного, вообще говоря, неинтегрируемого МОЗР уравнения

$$\begin{gathered} i\partial_t Q + \frac{1}{2}(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + (g_1 + g_2)Q = \varepsilon i F, \\ \partial_\xi G_1 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\eta |Q|^2, \quad \partial_\eta G_2 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\xi |Q|^2. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Здесь ε – малый параметр, $F \equiv AQ$ – возмущающий оператор.

Явный вид возмущающего оператора может определяться, например, малыми неровностями дна или учетом следующих поправок в исходной, несколько более физичной модели, рассмотренной, в частности, в работах [100, 101]. Для простоты взято линейное возмущение, учитывающее слабую неровность дна. Другие возмущения, связанные с исходной системой уравнений поверхностных волн, здесь обсуждаться не будут, хотя метод построения асимптотических решений позволяет исследовать уравнение (6.17) с достаточно широким классом возмущающих операторов.

Здесь рассматривается возмущение дромионного решения (4.18) невозмущенного уравнения ДС-1. Решение (4.18) уравнения (4.1) хорошо известно в силу того, что это, по-видимому, первое из найденных решений (2+1)-мерных интегрируемых уравнений, которое экспоненциально убывает во всех пространственных направлениях. Если $\kappa = -1$, а постоянная ρ такова, что $|\rho| > \frac{16}{\mu\lambda}$, это решение имеет особенности на некоторых линиях $\eta = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$.

Построение асимптотических солитоноподобных решений для возмущений интегрируемых уравнений – достаточно популярно. Наиболее подробно исследованы возмущения (1+1)-мерных уравнений: построены асимптотические решения, пригодные на временах порядка обратной величины параметра возмущения; подробно исследованы уравнения для поправок [124, 119, 125, 37]. В большом количестве работ исследуется неустойчивость квазиодномерных решений (2+1)-мерных уравнений по отношению к трансверсальным возмущениям [32, 98, 70]. Возмущение существенно двумерных решений менее развитая тематика.

При построении теории возмущений для решений нелинейных уравнений важную роль играет возможность полного исследования линеаризованного уравнения. В нашем случае, это можно сделать с помощью предложенного выше решения линеаризованного уравнения методом Фурье.

6.2.1 Постановка задачи и результаты

Асимптотическое по $\mathrm{mod}(O(\varepsilon^2))$ решение уравнений (6.17) с граничными условиями (4.19) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= W(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon U(\xi,\eta,t,\tau), \\ G_1(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= g_1(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon h_1(\xi,\eta,t,\tau), \\ G_2(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= g_2(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon h_2(\xi,\eta,t,\tau) \end{aligned} \tag{6.18}$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время. Главный член асимптотики имеет вид:

$$\begin{aligned} W(\xi,\eta,t,\tau) &= q(\xi,\eta,t;\rho(\tau)), \\ g_1(\xi,\eta,t,\tau) = u_1(\eta) &- \frac{\kappa}{2}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi'\partial_\eta |W(\xi',\eta,t,\tau)|^2, \\ g_2(\xi,\eta,t,\tau) = u_2(\xi) &- \frac{\kappa}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta'\partial_\xi |W(\xi,\eta',t,\tau)|^2. \end{aligned}$$

Здесь $q(\xi,\eta,t;\rho)$ – дромионное решение уравнения Деви-Стюартсона-1:

$$q(\xi,\eta,t;\rho) = \frac{\mu\lambda\rho\exp(it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\mu\xi)\cosh(\lambda\eta)(1-\kappa|\rho|^2\frac{\mu\lambda}{16}(1+\tanh(\lambda\eta))(1+\tanh(\mu\xi)))},$$

функции $u_1(\eta)$ и $u_2(\xi)$ соответствуют дромионным граничным условиям:

$$u_1(\xi) = \frac{\lambda^2}{2\cosh^2(\lambda\eta)}, \quad u_2(\xi)\frac{\mu^2}{2\cosh^2(\mu\xi)}.$$

Обозначим $\gamma(\tau) = 1 - \kappa\frac{\mu\lambda}{4}|\rho(\tau)|^2$, $\gamma_0 = \gamma(0)$.

Теорема 23. *Если*

$$\gamma(\tau) = \gamma_0^{\exp(2A\tau)}, \quad Arg(\rho(\tau)) \equiv const,$$

где $\gamma_0 > 1$ при $\kappa = -1$ и $0 < \gamma_0 < 1$ при $\kappa = 1$, тогда асимптотическое по $mod(O(\varepsilon^2))$ решение (6.19) равномерно пригодно при $t = O(\varepsilon^{-1})$.

Замечание 11. *На более широком интервале времени $t \ll \varepsilon^{-1}\log(\log(\varepsilon^{-1}))$ формулы (6.19) дают асимптотическое решение возмущенного уравнения ДС-1 по $mod(o(1))$.*

Проведенный асимптотический анализ пригоден для возмущений решений вида (4.18) без сингулярностей, то есть если $\kappa = 1$, тогда $|\rho| < 16/\mu\lambda$. В построенной асимптотике модуль параметра ρ зависит от τ. Если коэффициент в возмущении $A < 0$ тогда $|\rho|$ растет со временем и существует конечное значение τ_s при котором $\rho = 16/(\lambda\mu)$, при подходе к этому значению τ_s построенная асимптотика становится непригодной.

Развитие сингулярностей в решении неинтегрируемых методом обратной задачи систем уравнений типа Деви-Стюартсона известный эффект [138].

Замечание 12. *Уравнение модуляции для $|\rho(\tau)|$ может быть получено из "энергетического"равенства ([69]):*

$$\partial_t \int\int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta |Q|^2 = \varepsilon \int\int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta (Q\bar{F} - \bar{Q}F).$$

6.2.2 Решение линеаризованного уравнения

Воспользовавшись базисностью разложения приведенного в теореме 20, можно получить решение задачи Коши для линеаризованного уравнения ДС-1. Здесь зависимость $\hat{h}$ от времени несколько отличается от полученной в 6.1 из-за того, что исследуется решение уравнения ДС-1 с ненулевыми краевыми условиями (4.2).

Теорема 24. *Пусть $q_1 = Q$ и $q_2 = \kappa\bar{Q}$ где Q – решение уравнения ДС-1 с граничными условиями $G_1|_{\xi\to-\infty} = u_1$ и $G_2|_{\eta\to-\infty} = u_2$, и Q удовлетворяет условиям теоремы 20, решение линеаризованного уравнения ДС-1 – гладкая и интегрируемая функция U по ξ и η, где $\partial^\alpha U \in L_1 \cap C^1$ и $\partial^\alpha F \in L_1 \cap C^1$, для $|\alpha| \le 4$ и $t \in [0, T_0]$. Тогда*

$$\partial_t \hat{U}_1 = i(k^2 + l^2)\hat{U}_1 + \int dk' \hat{U}_1(k - k', l, t)\chi(k') + \int dl' \hat{U}_1(k, l - l', t)\kappa(l') + \hat{F}_1, \tag{6.19}$$

$$\partial_t \hat{U}_2 = -i(k^2 + l^2)\hat{U}_2 + \int dk' \hat{U}_2(k - k', l, t)\chi(k') + \int dl' \hat{U}_2(k, l - l', t)\kappa(l') + \hat{F}_2. \tag{6.20}$$

Если граничные условия в задаче для уравнения ДС-1 тождественные нули, тогда $\chi \equiv \kappa \equiv 0$. В этом случае формулы теоремы 20 позволяют явно решить линеаризованное уравнение ДС-1. В этом разделе рассматривается решение уравнения ДС-1 с ненулевыми граничными условиями, это приводит к интегральным слагаемым в формулах теоремы 20. Для того, чтобы выписать решение линеаризованного уравнения необходимо преобразовать формулы (6.19) и (6.20). В правой части (6.19) и (6.20) интегральные слагаемые ничто иное, как свертки. Перейдем к уравнениям для образов Фурье функций $\hat{U}(k, l, t, \tau)$ по переменным k и l. В результате получим линейное уравнение Шредингера:

$$i\partial_t \tilde{U}_1 + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)\tilde{U}_1 + (u_2(\xi\mu) + u_1(\eta\lambda))\tilde{U}_2 = \tilde{F}. \tag{6.21}$$

Здесь

$$\tilde{U}_1(\xi, \eta, t, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dkdl \hat{U}(k, l, t, \tau)\exp(-ik\eta - il\xi);$$

$$\tilde{F}(\xi, \eta, t, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dkdl \hat{F}(k, l, t, \tau)\exp(-ik\eta - il\xi).$$

Такое же уравнение, только с нулевой правой частью было получено при анализе зависимости от времени данных рассеяния системы ДС-1 в [109].

Решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями для уравнения (6.21) можно получить методом разделения переменных. Формулы для построения базисного набора решений однородного уравнения приведены, например, в [109]. В нашем случае решение уравнения (6.21) методом Фурье имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\xi,\eta,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dmdn \times \\
\times \breve{U}(m,n,t)X(\xi,m)Y(\eta,n)\exp(-it(m^2+n^2)) + \\
+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dn\breve{U}_\mu(n,t)Y(\eta,n)X_\mu(\xi)\exp(-it(n^2-\mu^2)) + \\
+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dm\breve{U}_\lambda(m,t)X(\xi,m)Y_\lambda(\eta)\exp(-it(m^2-\lambda^2)) + \\
+\breve{U}_{\mu,\lambda}X_\mu(\xi)Y_\lambda(\eta)\exp(it(\mu^2+\lambda^2)).
\end{aligned}
$$

Здесь приняты обозначения:

$$
X(m,\xi) = \frac{\mu\tanh(\mu\xi)+im}{im-\mu}\exp(-im\xi), \quad X_\mu(\xi) = \frac{\mu}{2\operatorname{ch}(\mu\xi)};
$$

$$
Y(n,\eta) = \frac{\lambda\tanh(\lambda\eta)+in}{in-\lambda}\exp(-in\eta), \quad Y_\lambda(\eta) = \frac{\lambda}{2\operatorname{ch}(\lambda\eta)};
$$

$$
\begin{gathered}
\partial_t\breve{U} = i(m^2+n^2)\breve{U} + \breve{F}(m,n,t), \quad \partial_t\breve{U}_\mu = i(n^2-\mu^2)\breve{U} + \breve{F}_\mu(n,t), \\
\partial_t\breve{U}_\lambda = i(m^2-\lambda^2)\breve{U} + \breve{F}_\lambda(m,t), \quad \partial_t\breve{U}_{\mu\lambda} = -i(\lambda^2-\mu^2)\breve{U} + \breve{F}_{\mu\lambda}(t), \\
\breve{U}|_{t=0} = \breve{U}_\mu|_{t=0} = \breve{U}_\lambda|_{t=0} = \breve{U}_{\mu\lambda}|_{t=0} = 0;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\breve{F}(m,n,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta\tilde{F}(\xi,\eta,t)\bar{X}(m,\xi)\bar{Y}(n,\eta), \\
\breve{F}_\mu(n,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta\tilde{F}(\xi,\eta,t)\bar{X}_\mu(\xi)\bar{Y}(n,\eta), \\
\breve{F}_\lambda(m,t,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta\tilde{F}(\xi,\eta,t)\bar{X}(m,\xi)\bar{Y}_\lambda(\eta), \\
\breve{F}_{\mu\lambda}(t,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta\tilde{F}(\xi,\eta,t)\bar{X}_\mu(\xi)\bar{Y}_\lambda(\eta).
\end{aligned}
$$

6.2.3 Уравнение для первой поправки

В этой части получено уравнение для медленной деформации параметра $\rho(\tau)$. Оно выводится, исходя из требования равномерной ограниченности первой поправки асимптотики в формуле (6.19).

Подставим формулу (6.19) в уравнение (6.17). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε. Уравнение при ε^0 удовлетворяется в силу того, что W, G_1, G_2 – асимптотическое решение невозмущенного уравнения (4.1). Для первой поправки получим линеаризованное уравнение ДС-1:

$$i\partial_t U + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)U + (G_1 + G_2)U + (V_1 + V_2)W = iH \tag{6.22}$$
$$\partial_\xi V_1 = -\frac{\kappa}{2}(W\bar{U} + \bar{W}U), \quad \partial_\eta V_2 = \frac{-\kappa}{2}\partial_\xi(W\bar{U} + \bar{W}U),$$

здесь

$$H = AW - \partial_\tau W.$$

Начальное и краевые условия для функций U, V_1 и V_2 – нулевые.

Прежде, чем воспользоваться формулами предыдущего раздела для решения линеаризованного уравнения, выясним вид правой части в первом из уравнений (6.23). От медленного времени τ в главном члене может зависеть лишь один параметр $\rho = \rho(\tau)$. Остальные параметры в формуле для главного члена асимптотики однозначно связаны с краевыми условиями и не меняются при возмущении уравнения. Для удобства представим $\rho(\tau) = r(\tau)\exp(i\alpha(\tau))$, где $r(\tau), \alpha(\tau)$ вещественные. Производная по медленному времени в этом случае может быть записана в виде:

$$\partial_\tau W = \partial_r W r' + \partial_\alpha W \alpha'.$$

Здесь неизвестны производные r' и α'. Они будут определены ниже.

Перейдем к вычислению образа $\hat{H}$. В соответствии с формулами теоремы 24 и видом функций ψ^+ и ϕ, приведенных в 4.1.4 и в приложении 6.2.5, получим:

$$\widehat{H}(k,l,t,\tau) = \exp(-it(\lambda^2 + \mu^2))\left(\widehat{P}(k,l;\rho) - \widehat{R}(k,l;\rho)\partial_\tau\rho\right),$$

где

$$\widehat{P}(k,l;\rho) = \exp(it(\lambda^2 + \mu^2))\widehat{iAW}, \ \ \widehat{R}(k,l;\rho) = \exp(it(\lambda^2 + \mu^2))\widehat{\partial_\tau W}.$$

В этих формулах выделена в явном виде зависимость от времени t. Такой вид удобен для выявления секулярных членов в формальном асимптотическом разложении (6.19). Выпишем дифференциальные уравнения для

$\breve{U}$:

$$\partial_t \breve{U} = i(m^2+n^2)\breve{U} + \exp(-it(\lambda^2+\mu^2))(\breve{P}(m,n;\rho) - \breve{R}(m,n;\rho)),$$
$$\partial_t \breve{U}_\mu = i(n^2-\mu^2)\breve{U} + \exp(-it(\lambda^2+\mu^2))(\breve{P}_\mu(n;\rho) - \breve{R}_\mu(n;\rho)),$$
$$\partial_t \breve{U}_\lambda = i(m^2-\lambda^2)\breve{U} + \exp(-it(\lambda^2+\mu^2))(\breve{P}_\lambda(m;\rho) - \breve{R}_\lambda(m;\rho)),$$
$$\partial_t \breve{U}_{\mu\lambda} = -i(\lambda^2-\mu^2)\breve{U} + \exp(-it(\lambda^2+\mu^2))(\breve{P}_{\mu\lambda}(\rho) - \breve{R}_{\mu\lambda}(\rho)).$$

Легко видеть, что к секулярным слагаемым в образах $\breve{U}$ приводит неоднородное слагаемое в уравнении для $\breve{U}_{\mu\lambda}$. Условие равенства нулю этого слагаемого и есть уравнение для определения зависимости $\rho(\tau)$:

$$\breve{R}_{\mu\lambda} - \breve{P}_{\mu\lambda} = 0, \quad \rho|_{\tau=0} = \rho_0. \tag{6.23}$$

В результате $\breve{U}_{\mu\lambda} \equiv 0$. Остальные уравнения для образов $\breve{U}$ легко интегрируются. Решения этих уравнений равномерно ограничены по всем своим аргументам.

Для утверждения об ограниченности первой поправки U, V_1, V_2 остается вернуться от образов $\breve{U}$ к пробразам. Можно заметить, как прямые (от U к $\breve{U}$), так и обратные (от $\breve{U}$ к U) интегральные преобразования можно представить как преобразования Фурье от гладких, экспоненциально убывающих по соответствующим переменным функций. Преобразование Фурье переводит такие функции в аналитические функции в некоторой окрестности вещественной прямой. Обратное преобразование переводит аналитическую функцию в экспоненциально убывающую. Таким образом, решение линеаризованного уравнения для первой поправки асимптотики $U(\xi,\eta,t,\tau)$ – пробраз построенных функций $\hat{U}$ – оказывается ограниченным и экспоненциально убывающим по пространственным переменным.

6.2.4 Уравнение модуляции параметра

Уравнение (6.23) приведем к более удобному для анализа виду. Для этого запишем в явном виде производную главного члена по медленному времени τ.

$$i\partial_\tau W = -\alpha' W + i\left[W - \frac{2W}{1-\kappa r^2\frac{\mu\lambda}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))}\right]\frac{r'}{r}. \tag{6.24}$$

Вычислим последовательно образы $\breve{(\cdot)}_{\mu\lambda}$ для каждого из слагаемых в формуле (6.24). Здесь удобно обозначить $\mu\lambda r^2/4 = \Gamma$

$$(\breve{W})_{\mu\lambda} = \frac{\kappa\bar{\rho}\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{8}(\kappa\Gamma - 1)\log|1-\kappa\Gamma|;$$

$$(i\breve{W})_{\mu\lambda} = -i\kappa\Gamma\frac{\rho\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{8}.$$

Обозначим образ последнего слагаемого из (6.24) $\breve{h}_{\mu\lambda}$. Он имеет вид:

$$\breve{h}_{\mu\lambda} = \frac{r'}{r}\frac{\kappa\bar{\rho}\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{8}(1-\kappa\Gamma)\left(\frac{1}{1-\kappa\Gamma} - 1 - \log|1-\kappa\Gamma|\right).$$

Образ $\breve{(\cdot)}$ слагаемого AW может быть представлен в похожем виде.

Подставим эти формулы в (6.23), разделим мнимую и вещественную части в этом уравнении в результате:

$$\alpha' = 0,$$

$$\frac{r'}{r}(\kappa\Gamma - 1)\log|1-\kappa\Gamma| - \frac{r'}{r}\left(\kappa\Gamma - (1-\kappa\Gamma)\log|1-\kappa\Gamma|\right) + A(\kappa\Gamma - 1)\log|1-\kappa\Gamma| = 0.$$

Используя обозначение для Γ, второе уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = -2\kappa A(1-\kappa\Gamma)\log|1-\kappa\Gamma|.$$

Это уравнение определяет эволюцию модуля комплексного параметра ρ. Аргумент этого параметра не меняется при выбранном возмущении $F = AQ$.

Обозначим $\gamma = 1 - \kappa\Gamma$, перепишем уравнение для γ. В результате получим:

$$\gamma' = 2A\gamma\log(\gamma).$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\gamma(\tau) = \exp(C\exp(2A\tau)),$$

где $\gamma|_{\tau=0} = \exp(C)$, тогда получим:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0^{\exp(2A\tau)}.$$

Теорема 23 доказана.

6.2.5 Приложения

Явные формулы Здесь приводятся задачи, решениями которых являются функции, сопряженные к функциям $\psi^{\pm}$ относительно введенных билинейных форм.

Выпишем интегральные уравнения, которым удовлетворяют элементы матриц-функции ϕ – решения краевой задачи, сопряженной решениям задачи (4.3), (1.4), относительно первой билинейной формы (4.8). Первый столбец матрицы ϕ – решение интегрального уравнения:

$$\phi_{11}(\xi,\eta,l,t) = \exp(il\xi) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' Q(\xi,\eta',t)\phi_{21}(\xi,\eta',l,t),$$
$$\phi_{21}(\xi,\eta,l,t) = \frac{-1}{2}\int_{\xi}^{\infty} d\xi' \bar{Q}(\xi',\eta,t)\phi_{11}(\xi',\eta,l,t).$$

Второй столбец ϕ удовлетворяет интегральному уравнению вида:

$$\phi_{12}(\xi,\eta,l,t) = \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty} d\eta' Q(\xi,\eta',t)\phi_{22}(\xi,\eta',l,t),$$
$$\phi_{22}(\xi,\eta,l,t) = \exp(-il\eta) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \bar{Q}(\xi',\eta,t)\phi_{12}(\xi',\eta,l,t).$$

Явные формулы для первого столбца матрицы ϕ использовавшиеся в п.6.2.4:

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(il\xi) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{dp\mu\exp(ikp))}{2\cosh(\mu p)}}{(1-\kappa|\rho|^2\frac{\lambda\mu}{16}(1+\tanh(\mu\xi))(1+\tanh(\lambda\eta))} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{-\kappa|\rho|^2\lambda\mu(1+\tanh(\mu\xi))}{8\cosh(\mu\xi)} \\ \frac{-\kappa\bar{\rho}\lambda\exp(-it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\lambda\eta)} \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Глава 7

Асимптотики многомерных интегралов

Эта глава состоит из двух частей. В первой части построены асимптотики интегралов, встречающихся при построении асимптотического решения системы (3.53) в окрестностях стационарных точек фазовой функции осциллирующей экспоненты. Эта часть главы носит во многом вспомогательный характер – исследуемые здесь интегралы встречаются в тексте диссертации, в части посвященной построению асимптотики решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили-2.

Вторая часть главы посвящена построению асимптотик многомерных интегралов типа Коши с быстро осциллирующей экспонентой. Эта часть работы представляется интересной сама по себе.

Вычисление асимптотик одномерных интегралов со слабой особенностью и быстро осциллирующей экспонентой проведено в [78] с.26, [67] с.332. Асимптотика многомерных интегралов без особенностей подынтегральной функции с быстро осциллирующими экспонентами подробно изучена в [78], [4]. Асимптотика интегралов Коши с быстро осциллирующей экспонентой в одномерном случае исследована в [78], в многомерном случае, в ситуации общего положения в работе автора [40]. Асимптотики многомерных интегралов со слабой особенностью исследованы не столь подробно. В частности, некоторые интегралы специального вида по комплексной плоскости исследовались в работе автора [45].

7-1 Асимптотика двукратных интегралов со слабой особенностью

Интегралы по полуплоскости с невырожденной стационарной точкой фазовой функции экспоненты

Здесь построена асимптотика интеграла:

$$I = \int\int_{\Omega^+} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{l-n}\exp(-i(n^2+\bar{n}^2)),$$

при $|l|\to\infty$, где область $\Omega^+ = \{l+\bar{l}-i(l-\bar{l})>0\}$.

Теорема 25. *Асимптотика интеграла I при $|l|\to\infty$ имеет вид:*

$$I = -2i\pi\frac{\exp(-i(l^2+\bar{l}^2))}{2il} - \frac{3i\pi}{2\bar{l}} + O(|l|^{-2}) \quad \textit{при} \quad l\in\Omega^+;$$

$$I = -\frac{i\pi}{2\bar{l}} + O(|l|^{-2}) \quad \textit{при} \quad l\notin\Omega^+.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $l\in\Omega^+$. Разобьем область Ω^+ на три подобласти: $\Omega_1^+ = \{\Omega^+\backslash\{[|n|\le|l|/2]\cup[|n-l|<\varepsilon]\}\}$ – эта область не содержит стационарную точку фазы экспоненты и особенность подынтегральной функции; $\Omega_2^+ = \{\Omega^+\backslash[|n|\ge|l|/2]\}$ – эта область содержит стационарную точку фазы экспоненты; $\Omega_3^+ = \{|n-l|<\varepsilon\}$ – область, в которой лежит особенность подынтегральной функции.

Интеграл по области Ω_1^+ возьмем по частям, интегрируя экспоненту по переменной n. В результате получим:

$$\int\int_{\Omega_1^+} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{l-n}}\exp(-i(n^2+\bar{n}^2)) = \int_{\partial\Omega_1^+}\frac{d\bar{n}}{\overline{\overline{l-n}}}\frac{\exp(-i(n^2+\bar{n}^2))}{-2in} -$$
$$-\int\int_{\Omega_1^+}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{l-n}}\frac{\exp(-i(n^2+\bar{n}^2))}{2in^2}. \tag{7.1}$$

Граница области Ω_1^+ состоит из большой полуокружности радиуса R при $R\to\infty$, окружности радиуса ε вокруг точки $l=n$, полуокружности радиуса $|l|/2$ и двух отрезков – отрезка
$[R\exp(3i\pi/4), |l|\exp(3i\pi)/2]$ и отрезка $[|l|\exp(-i\pi/4)/2, R\exp(3i\pi)]$.

Рассмотрим интегралы по элементам границы области Ω_1^+. Интеграл по большой полуокружности при $R \to \infty$ равен нулю. Интеграл по полуокружности радиуса $|l|/2$ имеет порядок $|l|^{-3}$ (из-за осцилляций экспоненты и малости подынтегральной функции). Интеграл по окружности вокруг точки $n = l$ будем рассматривать в пределе при $\varepsilon \to 0$ в результате получим вычет подынтегральной функции, умноженный на $2i\pi$. Интеграл по оставшимся отрезкам: $[R\exp(3i\pi/4), |l|\exp(3i\pi)/2]$ и $[|l|\exp(-i\pi/4)/2, R\exp(3i\pi)]$ (обозначим их объединение через L) в результате простых вычислений приводится к виду:

$$\int_{n\in L} \frac{d\bar{n}}{-2in\overline{(l-n)}} = \frac{\exp(3i\pi/4)}{-2i\bar{l}} \int_{|\lambda|\geq|l|/2} \frac{d\lambda}{\bar{l} - \lambda\exp(i\pi/4)}.$$

Второе слагаемое в (7.1) оценивается величиной $O(|l|^{-3})$.

Рассмотрим интеграл по Ω_2^+. Представим:

$$\frac{1}{\overline{l-n}} = \frac{1}{\bar{l}}\big(1 + \frac{\bar{n}}{\overline{l-n}}\big).$$

Тогда интеграл по Ω_2^+ можно записать в виде:

$$I_2 = \int\int_{\Omega_2^+} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{l-n}} \exp(-i(n^2+\bar{n}^2)) =$$

$$= \frac{1}{\bar{l}} \int\int_{\Omega_2^+} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{l-n}} \exp(-i(n^2+\bar{n}^2)) +$$

$$+ \frac{1}{\bar{l}} \int\int_{\Omega_2^+} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{l-n}} \bar{n}\exp(-i(n^2+\bar{n}^2)).$$

Здесь втрое слагаемое возьмем по частям, интегрируя экспоненту по переменной $\bar{n}$. После некоторых вычислений получим:

$$I_2 = \frac{1}{\bar{l}} \int\int_{\Omega^+} dn\wedge d\bar{n}\exp(-i(n^2+\bar{n}^2)) +$$

$$+ \frac{1}{2i\bar{l}} \int_{|l|\exp(3i\pi/4)/2}^{|l|\exp(-i\pi/4)/2} \frac{dn}{\overline{l-n}} + O(|l|^{-2}).$$

Интеграл по Ω_3^+ при $\varepsilon \to 0$ равен нулю.

Просуммируем полученные асимптотики:

$$I = -2i\pi\frac{\exp(-i(l^2+\bar{l}^2))}{2il} + \frac{\exp(i\pi/2)}{2i\bar{l}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\bar{l}\exp(-i\pi/4) - \lambda} +$$

$$\frac{1}{2i\bar{l}}\int_{\Omega^+} dn\wedge d\bar{n}\exp(-i(n^2+\bar{n}^2))+O(|l|^{-2}).$$

Таким образом, доказано первое утверждение теоремы. Второе доказывается так же, следует только учесть, что в этом случае $l\notin\Omega^+$ и нет вклада интеграла вокруг области Ω_3^+.

Теорема доказана.

Асимптотика интеграла с вырожденной фазовой функцией

В этой части построена асимптотика при $|p|\to\infty$ интеграла

$$W^+=\int\int_{\Omega^+}\frac{dr\wedge d\bar{r}}{\overline{p-r}}\exp(-i\omega(r)),\tag{7.2}$$

где $\Omega^\pm=\pm\Re(p)>0$.

Сформулируем результат:

Теорема 26. *Асимптотика интеграла (7.2) где* $\omega(p)=4(p^3+\bar{p}^3)-v^2(p+\bar{p})$, *при* $|p|\to\infty$ *и* $|p\pm\frac{v}{\sqrt{12}}|\geq 0$ *имеет вид:*

$$W^+=\left[\begin{array}{c}\frac{1}{\bar{p}}\phi^+_{00}(v^2)+\frac{1}{\bar{p}^2}\phi^+_{01}(v^2)+\frac{\pi i}{12\bar{p}^2}+2\pi i\frac{\exp(-i\omega(p))}{12p^2}+\\ +O(|p|^{-3}+|v|^2|p|^{-2}),\quad \textit{при}\quad p\in\Omega^+;\\ \\ \frac{1}{\bar{p}}\phi^+_{00}(v^2)+\frac{1}{\bar{p}^2}\phi^+_{01}(v^2)-\frac{\pi i}{12\bar{p}^2}+\\ +O(|p|^{-3}+|v|^2|p|^{-2}),\quad \textit{при}\quad p\notin\Omega^+.\end{array}\right.\tag{7.3}$$

Здесь

$$\phi^\pm_{jk}=\int\int_{\Omega^\pm}dr\wedge d\bar{r}\,r^j\bar{r}^k\exp(-i\omega(r)).$$

Перейдем к доказательству теоремы. Представим интеграл в виде:

$$\begin{gathered}W^+=\frac{1}{\bar{p}}\int\int_{\Omega^+}dn\wedge d\bar{n}\exp(-i\omega(n))\ +\\ +\frac{1}{\bar{p}^2}\int\int_{\Omega^+}dn\wedge d\bar{n}\exp(-i\omega(n))\bar{n}\ +\\ +\frac{v^2}{12\bar{p}^2}\int\int_{\Omega^+}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{p-n}}\bar{n}^2\exp(-i\omega(n))\ +\\ +\frac{1}{12\bar{p}^2}\int\int_{\Omega^+}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{\overline{p-n}}(12\bar{n}^2-v^2)\exp(-i\omega(n)).\end{gathered}$$

В последнем слагаемом проинтегрируем по частям по переменной n экспоненту, в результате получим:

$$W^+ = \frac{1}{\bar p}\phi^+_{00}(v^2) + \frac{1}{\bar p^2}\phi^+_{01}(v^2) +$$
$$+\frac{1}{12\bar p^2}\int_{\partial\Omega^+} \frac{d\bar n}{\overline{\overline{p-n}}}\frac{(12\bar n^2 - v^2)\exp(-i\omega(n)))}{(-i)(12n^2-v^2)} + O(|p|^{-3} + |v|^2|p|^{-2}).$$

Рассмотрим интеграл по границе области $\partial\Omega^+$. Он складывается из интегралов по мнимой оси $\Re(r) = 0$, по половине окружности радиуса R при $R \to \infty$, $\quad \Re(r) > 0$ и по окружности $|p - r| = \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (если $p \in \Omega^+$). Можно показать, что интеграл по большой полуокружности стремится к нулю. В результате получим утверждение теоремы.

Еще один двукратный интеграл, асимптотика которого необходима в вычислениях п.3:

$$U^+ = \int\int_{\Omega^+} \frac{dr\wedge d\bar r}{p-r}\,\bar r \exp(-i\omega(r)).$$

Его асимптотика вычисляется так же, как асимптотика интеграла (7.2) и при $|p| \to \infty$ $|p \pm v| \geq 0$ имеет вид:

$$U = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\bar p}\phi^+_{10}(v^2) + 2i\pi\frac{1}{12ip}\exp(-i\omega(p)) + \frac{\pi i}{12\bar p} + 2\pi i\frac{\exp(-i\omega(p))}{12p^2} + \\ \qquad +O(|p|^{-2} + |v|^2|p|^{-2}), \quad \text{при} \quad p \in \Omega^+; \\ \\ \frac{1}{\bar p}\phi^+_{10}(v^2) - \frac{\pi i}{12\bar p} + O(|p|^{-2} + |v|^2|p|^{-2}), \quad \text{при} \quad p \notin \Omega^+. \end{array}\right.$$

7.1.1 Сведение четырехкратного интеграла к двукратному

Эта часть носит технический характер. Здесь приведены вычисления, сводящие четырехкратные интегралы по всей комплексной плоскости и по различным ее полуплоскостям к двукратным интегралам.

Четырехкратный интеграл по комплексной плоскости с невырожденным показателем осциллирующей экспоненты

Покажем, что четырехкратный интеграл

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn\wedge d\bar n}{l_j - n}\frac{1}{2i\pi}\exp(-i(n^2+\bar n^2))\times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{\overline{n-m}} \exp(i(m^2 + \overline{m}^2))$$

можно выразить через двойной. Для этого в двойном интеграле по n сделаем замену: $n - m = r$, тогда J примет вид:

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \frac{1}{2i\pi} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2)) \exp(-2i(rn + \overline{rn})).$$

Проинтегрируем по частям по $\bar{n}$, интегрируя выражение $d\bar{n}$ и дифференцируя по $\bar{n}$ все подынтегральное выражение. В результате получим:

$$J = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{R\to\infty} \int_{|n|=R} \frac{dn\bar{n}}{l_j - n} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2)) \exp(-2i(rn + \overline{rn})) +$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|l-n|=\varepsilon} \frac{dn\bar{n}}{l_j - n} \frac{1}{2i\pi} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2)) \exp(-2i(rn + \overline{rn})) -$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \bar{n} \frac{1}{2i\pi} \times$$

$$\times \int\int_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r}(-2i) \exp(i(r^2 + \bar{r}^2)) \exp(-2i(rn + \overline{rn})).$$

Здесь первое слагаемое равно нулю из-за быстрой осцилляции по n подынтегральной функции, второе слагаемое равно взятому со знаком минус вычету подынтегральной функции при $n = l$, внутренний интеграл в третьем слагаемом вычисляется явно. Окончательно получаем:

$$J = \bar{l}_j \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\overline{l_j - m}} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)) \, - \, \exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2)).$$

Четырехкратный интеграл по разным полуплоскостям с невырожденным показателем экспоненты

Рассмотрим интеграл:

$$J_{-+} = \int\int_{\Omega^-} \frac{dn\wedge d\bar{n}}{l-n}\frac{\exp(i(n^2+\bar{n}^2))}{2i\pi}\times$$

$$\times\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2)).$$

Проинтегрируем по частям интегрируя по $\bar{n}$:

$$J_{-+} = \int_{\partial\Omega_-}\frac{dn}{l-n}\bar{n}\frac{\exp(i(n^2+\bar{n}^2))}{2i\pi}\times$$

$$\times\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2))-$$

$$-\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{l-n}\bar{n}\frac{\partial}{\partial\bar{n}}\frac{\exp(i(n^2+\bar{n}^2))}{2i\pi}\times$$

$$\times\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2)).$$

Вычисление производной дает:

$$J_{-+} = \int_{\partial\Omega^-}\frac{dn}{l-n}\frac{\bar{n}\exp(i(n^2+\bar{n}^2))}{2i\pi}\times$$

$$\times\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2))-$$

$$-\frac{3}{4}\int_{\partial\Omega^-}\frac{dn}{l-n}\exp(i(n^2+\bar{n}^2)).$$

В первом слагаемом рассмотрим интеграл по части границы:

$$\mathcal{I} = \lim_{R\to\infty}\int_{R\exp(-i\pi/4)}^{R\exp(3i\pi/4)}\frac{dn}{l-n}\frac{\bar{n}\exp(i(n^2+\bar{n}^2))}{2i\pi}\times$$

$$\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i(m^2+\bar{m}^2)).$$

Поменяем порядок интегрирования по $m,\bar{m}$ и n. Внутренний интеграл по n вычисляется явно:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{R\exp(-i\pi/4)}^{R\exp(3i\pi/4)}dn\frac{\bar{n}}{(l-n)\overline{\overline{(n-m)}}} = \left[\begin{array}{ll}\frac{1}{2}+\frac{\bar{m}}{il-\bar{m}}, & \text{при}\quad l\in\Omega^+;\\ -1/2 & \text{при}\quad l\in\Omega^+.\end{array}\right.$$

В последнем выражении для J_{-+} интегралы по большой полуокружности $|n| = R$ при $R \to \infty$ равны нулю.

Окончательные формулы для J_{-+} зависят от l:

$$J_{-+} = \left[\begin{array}{c} \frac{-5}{4}i\pi + il \int\int_{\Omega^+} dm \wedge d\bar{m} \frac{\exp(-i(m^2+\bar{m}^2))}{il-\bar{m}}, \quad \text{при} \quad l \in \Omega^+; \\ \\ \frac{-5}{4}i\pi \, + \, \frac{3}{2}i\pi \exp(i)l^2 + \bar{l}^2)) \\ -\bar{l}\exp(i(l^2+\bar{l}^2)) \int\int_{\Omega^+} dm \wedge d\bar{m} \frac{\exp(-i(m^2+\bar{m}^2))}{\overline{l-m}}, \quad \text{при} \quad l \in \Omega^-. \end{array} \right.$$

Четырехкратный интеграл с вырожденной функцией в показателе осциллирующей экспоненты

Сведем четырехкратный интеграл

$$J_1 = \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \exp(i\omega(n)) \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{\overline{n-m}} \exp(-i\omega(m))$$

к сумме двойных интегралов. Обозначим:

$$V(n, v^2) = \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\overline{n-r}} \exp(-i\omega(r)).$$

Для функции $V(p, v^2)$ справедлива формула:

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{n}} = 12i\bar{n}\exp(i\omega(n))\phi_{00}(v^2) \, + \, 12i\exp(i\omega(n))\phi_{01}(v^2).$$

Эту формулу можно получить, сделав замену $\rho = n - r$ в интеграле, продифференцировав получившееся выражение для $V(n, v^2)$ по $\bar{n}$ и, затем, сделав обратную замену: $r = n - \rho$.

Для двойного интеграла по $\bar{n}$ и n формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} V(n, v^2) = \lim_{R\to\infty} \int_{|n|=R} \frac{dn\,\bar{n}\,V(n, v^2)}{p-n} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|p-n|=\varepsilon} \frac{dn\,\bar{n}}{p-n} V(n, v^2) \, - \, \int\int_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \bar{n} \frac{\partial V(n, v^2)}{\partial \bar{n}}. \qquad (7.4)$$

Асимптотика функции $V(n, v^2)$ при $|n| \to \infty$ получена выше. Подстановка этой асимптотики в первый член правой части формулы (7.4) дает ноль. Второе слагаемое в правой части (7.4) дает вычет подынтегральной функции в точке p, помноженный на $2i\pi$. Тогда получим:

$$J_1(p,v^2) = \bar{p}\,V(p,v^2)\;-\;\phi_{00}(v^2)\exp(i\omega(p)) -$$

$$-\,12i\phi_{01}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-r}\bar{n}\exp(i\omega(n)) +$$

$$+\,iv^2\phi_{00}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\mathbb{C}}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-r}\exp(i\omega(n)).$$

Аналогично можно преобразовать интеграл

$$J_1^{-+} = \int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\exp(i\omega(n))\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{n-m}}}\exp(-i\omega(m)).$$

Здесь отличие от интеграла J_1 состоит в добавлении в ответ интегралов по границам областей Ω^+ и Ω^-. Приведем окончательный результат: при $p\in\Omega^+$:

$$J_1^{-+} = -\phi_{00}^{+}(v^2)\exp(i\omega(p)) +$$

$$+\bar{p}\exp(i\omega(p))\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{\overline{\overline{p-m}}}\exp(-i\omega(m)) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\bar{n}\exp(i\omega(n)) +$$

$$+iv^2\phi_{00}^{+}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\exp(i\omega(n)) -$$

$$-12i\phi_{01}^{+}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\bar{n}\exp(i\omega(n));$$

при $p\notin\Omega^+$:

$$J_1^{-+} = -\phi_{00}^{+}(v^2) + p\int\int_{\Omega^+}\frac{dm\wedge d\bar{m}}{p+\bar{m}}\exp(-i\omega(m))-$$

$$-\frac{1}{2}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\bar{n}\exp(i\omega(n)) -$$

$$-iv^2\phi_{00}^{+}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\exp(i\omega(n)) -$$

$$-12i\phi_{01}^{+}(v^2)\frac{1}{2i\pi}\int\int_{\Omega^-}\frac{dn\wedge d\bar{n}}{p-n}\bar{n}\exp(i\omega(n)).$$

7-2 Асимптотика многомерного интеграла типа Коши

Здесь строится равномерная асимптотика интеграла

$$I(z,t) = V.P. \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\Omega(x) \exp(itS(x,z))}{p(x)} \tag{7.5}$$

по большому параметру t, при $z \in \mathbb{R}$; функция $\Omega(x)$ - голоморфная в окрестности $x \in \mathbb{R}^n$, быстро убывающая при $|x_k| \to \infty$ для $\forall k = 1, \dots, n$; $S(x,z)$ - аналитическая функция по x.

Задачи о построении асимптотик подобных интегралов встречаются, например, при исследовании решений волновых уравнений методом Фурье. В частности, в теории возмущений размерность n связана не столько с пространственной размерностью соответствующего волнового уравнения, сколько с номером поправки в ряду теории возмущений : чем больше номер поправки, тем больше значение n. Похожий интеграл определяет асимптотику нелокальной задачи Римана при $t \to \infty$.

При построении асимптотики важную роль играют стационарные точки фазы экспоненты и нули знаменателя. Здесь предполагается, что функция $p(x)$ имеет вид:

$$p(x) = \prod_{j=1}^{N} p_j(x), \tag{7.6}$$

где $p_j(x)$ - голоморфные функции имеют нули только первого порядка. Многообразия $p_j(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n$ обозначаются P_j, их объединение : $P = \cup_j P_j$. Многообразия P_j находятся в общем положении. В одной точке пересекается не более n различных P_j, то есть, если $n < N$, тогда:

$$\cap_{k=1}^{n+1} P_{j_k} = \varnothing, \quad \text{для} \quad \forall j_k = 1, \dots, N. \tag{7.7}$$

Многообразия $P_{j_1 \dots j_k}$ определяются так:

$$P_{j_1 \dots j_k} = \cap_{l=1}^{k} P_{j_l}.$$

Функция $S(x,z)$ на $P_{j_1 \dots j_k}$ как функция $(n-k)$ переменных обозначается через $S^{j_1 \dots j_k}(x,z)$. Следуя [78], стационарные точки этой функции называются граничными стационарными точками. Ниже предполагается, что для $\forall l \neq j_1 \dots j_k$, при $\forall k = 0, \dots, n-1$ выполнено условие [87], с.205 :

$$(\partial_{p_l} S^{j_1 \dots j_k} = 0) \cap P_{j_1 \dots j_k l} - (n-k-1) - \text{мерно пренебрежимо.} \tag{7.8}$$

В одномерном случае условие (7.8) означает, что стационарные точки фазы S не совпадают с нулями знаменателя подынтегральной функции в (7.5). В случае $n=2$ условия (7.8) можно сформулировать следующим образом : во-первых, - линии $(\partial_{p_l} S = 0)$ и P_l пересекаются на множестве меры нуль; во-вторых, - граничные стационарные точки функций S^1 и S^2 не совпадают с нульмерным многообразием $P_{12} = P_1 \cap P_2$.

Основные результаты сформулированы в теоремах 27 и 28.

Теорема 27. *Пусть для интеграла (7.5) выполнены условия (7.7), (7.8), тогда:*

1) если $\cap_{k=1}^{n} P_{j_k} = \{x^{(g)}\}_{g=1}^{G}, \quad x \in \mathbb{R}$, *то:*

$$I = \sum_{g=1}^{G} a_g \exp(itS(x^{(g)}, z) + O(t^{-\gamma}),$$

где $\gamma = const > 0$,

$$a_g = \pm N_g (i\pi)^n \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(p_{j_1} \dots p_{j_n})} \frac{\Omega(x)}{p_{j_{n+1}} \dots p_{j_N}} |_{x=x^g},$$

$x^{(g)} \in P_{j_1 \dots j_n}$, *знак плюс ставится, если преобразование* $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (p_{j_1}, \dots, p_{j_n})$ *сохраняет ориентацию и минус - в противном случае. Целое число* N_g *определено в формуле (7.23).*

2) Если $\cap_{k=1}^{n} P_{j_k} = \varnothing$, *для* $\forall j_k = 1, \dots, N$ *то:*

$$I = O(t^{-\gamma}).$$

Теорема 27 дает ответ не для всех $z \in \mathbb{R}$. При изменении z может нарушиться условие (7.8). Поэтому асимптотические формулы, приведенные здесь, неравномерны по z. Построим равномерную асимптотику интеграла вида (7.5) в окрестности точки $z = z_0$, где нарушается условие

(7.8). Для этого зависимость интеграла (7.5) от параметра рассмотрим при специальном виде фазы экспоненты:

$$S(x,z) = \sum_{k=1}^{n-1}(x_k-1)^2 + (x_n-z)^2; \tag{7.9}$$

Для простоты примем, что $N = n$ в (7.6), и, что многообразия P_j пересекаются в единственной точке:

$$\cap_{j=1}^{n} P_j = 0. \tag{7.10}$$

Здесь условие (7.8) нарушается при $z = 0$. Вне этой точки асимптотика интеграла описана в теореме (7.5). Поведение главного члена асимптотики интеграла вблизи $z = 0$ сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 28. *Пусть все стационарные точки функции $S(x,z)$ по x и граничные стационарные точки $S(x,z)$ на всех многообразиях $P_{j_1\ldots j_k}$, где $k = 1,\ldots,n-1$ невырождены, тогда асимптотика интеграла (7.5) по t при условиях (7.9), (7.10) при $z\sqrt{t} = O(1)$ имеет вид:*

$$I(x,z) = B\exp(it(n-1))\exp(itz^2)\Phi(z\sqrt{t}) + O(t^{-1/2}), \tag{7.11}$$

где $B = const$, $\Phi(y) = \int_0^y dv\exp(-iv^2)$ - интеграл Френеля.

Асимптотика интегралов (7.5) исследовалась в [78]. В многомерном случае в [78] рассматривалась ситуация, когда фаза экспоненты имеет только граничные стационарные точки, и многообразия P_j не имеют точек пересечения. Случай, когда полюс интеграла сливается со стационарной точкой фазы экспоненты, исследован для интеграла (7.5) при n=1, p=x, $S(x) = (x-z)^2$. Главный член асимптотики, в этой ситуации, сводится к интегралу Френеля с точностью до постоянного множителя. Здесь рассматривается более общий случай. Во-первых,- многообразия P_j пересекаются между собой, во-вторых,- рассмотрена ситуация, когда граничная стационарная точка фазы экспоненты сливается с полюсом порядка n в n-мерном интеграле.

Здесь в явном виде приводится главный, ограниченный член асимптотики интеграла (7.5). Вычисление высших поправок сводится к построению асимптотик интегралов с быстро осциллирующей экспонентой и голоморфными подынтегральными функциями. Асимптотики таких интегралов исследованы в [78, 4].

7.2.1 Условия существования интеграла Коши

Здесь формулируются достаточные условия существования интеграла в смысле главного значения [78]:

$$V.P. \int_L \Big[\frac{\omega}{p}\Big] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{L\setminus|p|>\varepsilon} \Big[\frac{\omega}{p}\Big], \tag{7.12}$$

где L - n- мерное аналитическое многообразие, возможно, с псевдокраем [87], с.215; $\omega = \Omega(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ - голоморфная дифференциальная форма в окрестности L. Всюду ниже предполагается, что интеграл по $L\setminus|p| \leq \varepsilon$ существует.

Условия существования интеграла (7.12) при $L = \mathbb{R}^n$ обсуждались в [83]. В нашем случае это - условия (7.6), (7.7) на многообразия P_j и требование, чтобы P_j находились в общем положении.

Здесь нас будет интересовать случай, когда край bL - псевдомногообразие размерности $n-1$; будем полагать, что для $\forall k = 1, \ldots, n-1$ выполняется условие:

$$bL \cap P_{j_1 \ldots j_k} - (n-k) - \text{мерно пренебрежимо.} \tag{7.13}$$

Поясним смысл условия (7.13). Если $n = 1$ и L - отрезок, тогда нуль знаменателя не должен совпадать с концом отрезка интегрирования. Если $n = 2$ и L - кусок плоскости, тогда, во-первых, - пересечение P_1 и P_2 с краем нульмерно, во-вторых, - нульмерное многообразие P_{12} не пересекается с краем bL.

Множество всех $P_{j_1 \ldots j_k}$ на многообразии L разделим на два. Через $\mu_k(L)$ обозначим множество таких $P_{j_1 \ldots j_k}$, что $P_{j_1 \ldots j_k} \cap P_l \cap L = \varnothing$ для $\forall l \neq j_1, \ldots, j_k$. Множество $P_{j_1 \ldots j_k}$, неудовлетворяющих этому условию обозначим через $\nu_k(L)$.

Лемма 18. *Пусть L n- мерное аналитическое многообразие с псевдокраем bL, $\omega = \Omega(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ - голоморфная дифференциальная форма в окрестности L, интеграл от ω/p по $L\setminus|p| \leq \varepsilon$ существует при $\forall \varepsilon > 0$ и выполнены условия (7.7), (7.13). Тогда существует интеграл (7.12) и справедлива формула :*

$$
\begin{aligned}
V.P. \int_L \tfrac{\omega}{p(x)} &= \int_{\mathcal{L}} \tfrac{\omega}{p(x)} - \\
-\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(i\pi)^k &\Bigg[\textstyle\sum_{\nu_k(L)} V.P. \int_{P_{j_1\cdots j_k}} res^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\tfrac{\omega}{p}\right] + \\
+\textstyle\sum_{\mu_k(L)} \int_{P_{j_1\cdots j_k}} res^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\tfrac{\omega}{p}\right] &\Bigg] - (i\pi)^n \textstyle\sum_{\mu_n(L)} res^n_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\tfrac{\omega}{p}\right] \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathcal{L}^-$ – поверхность, обходящая нули $p(x)$ по той части области границы Лере [83] вещественного многообразия P, где $\Im(p_j) \le 0, \quad j = 1, \dots, N$.

Прежде, чем переходить к доказательству леммы введем обозначения. границу Лере многообразия $P_{j_1\dots j_k} \cap L$, то есть поверхность $|p_{j_l}| = \varepsilon$, где $l = 1, \dots, k$ на L, будем обозначать через $\delta^{\varepsilon}_{P_{j_1\cdots j_k}}$.

Замечание 13. *Здесь мы будем рассматривать сложные границы Лере с естественной ориентацией, соответственно сложный вычет Лере степени k имеет вид :*

$$res^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\frac{\omega}{p}\right] = \frac{\partial(x_{l_1}, \dots, x_{l_k})}{\partial(p_{j_1}, \dots, p_{j_k})}\Omega \frac{dx_{l_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{l_n}}{p_{j_{k+1}} \cdots p_{j_N}},$$

где преобразование $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (p_{j_1}, \dots, p_{j_k}, x_{l_{k+1}}, \dots, x_n)$ сохраняет ориентацию.

Доказательство. Обозначим через $l_\varepsilon(L)$, ту часть объединения границ Лере, где $Im(p_{j_l}) < 0$. Поверхность, удовлетворяющую условию $x \in L \backslash |p| \le 0$ и $x \in l_\varepsilon$, обозначим через $\mathcal{L}$.

Рассмотрим интеграл :

$$I_\varepsilon = \int_{L\backslash|p|>\varepsilon} \left[\frac{\omega}{p}\right] == \int_{\mathcal{L}} \frac{\omega}{p(x)} - \int_{l_\varepsilon(L)} \frac{\omega}{p(x)}.$$

По условию леммы подынтегральные формы голоморфны в окрестности L, тогда интеграл (7.12) можно представить в виде :

$$V.P. \int_L \left[\frac{\omega}{p}\right] = \int_{\mathcal{L}} \frac{\omega}{p(x)} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l_\varepsilon(L)} \frac{\omega}{p(x)}. \qquad (7.15)$$

Из формулы для сложных вычетов [2], с.150 получим :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l_\varepsilon(L)}\frac{\omega}{p(x)}=\sum_{k=1}^{n-1}(i\pi)^k\Bigg[\sum_{\nu_k(L)}V.P.\int_{P_{j_1\dots j_k}}\mathrm{res}^k_{P_{j_1\dots j_k}}\left[\frac{\omega}{p}\right]+$$
$$+\sum_{\mu_k(L)}\int_{P_{j_1\dots j_k}}\mathrm{res}^k_{P_{j_1\dots j_k}}\left[\frac{\omega}{p}\right]\Bigg]-(i\pi)^n\sum_{\mu_n(L)}\mathrm{res}^n_{P_{j_1\dots j_n}}\left[\frac{\omega}{p}\right]. \qquad (7.16)$$

Из (7.15) (7.16) следует формула (7.14).

Формула (7.14) позволяет свести вопрос о существовании n-мерного интеграла в смысле главного значения к вопросу о существовании интегралов в смысле главного значения меньшей размерности. Перейдем к доказательству существования предела (7.12). В формуле (7.14) интегралы по многообразиям из множества $\mu_k(L)$ и по $\mathcal{L}$ существуют в силу условий интегрируемости на L.

Рассмотрим интегралы в смысле главного значения по многообразиям из множества $\nu_k(L)$. В силу условия (3.3) все $P_{j_1\dots j_k}$ из $\nu_k(L)$ являются многообразиями, возможно, с псевдокраем $bP_{j_1\dots j_k}=bL\cap P_{j_1\dots j_k}$, размерности $(n-k-1)$. В свою очередь для псевдокрая этого многообразия выполнено условие (7.13) :

$$bP_{j_1\dots j_k}\cap P_{l_1\dots l_m}=bL\cap P_{j_1\dots j_k}\cap P_{l_1\dots l_m}=$$
$$=bL\cap P_{j_1\dots j_k l_1\dots l_m}-(n-(k+m))\text{-мерно пренебрежимо.}$$

Следовательно, для каждого $P_{j_1\dots j_m}\in\nu_k(L)$ выполняются условия леммы 18. Для $P_{j_1\dots j_m}$ также можно применять формулу (7.14). Последовательно применяя (7.14) к многообразиям из множества $\nu_k(L)$, получим сумму интегралов по поверхностям, обходящим нули знаменателя подынтегральной формы в (7.12), сумму интегралов по многообразиям из множества $\nu_k(L)$ и сумму вычетов порядка n. Каждый член этой суммы ограничен. Следовательно, интеграл (7.12) существует. Лемма доказана.

Кроме этого нам потребуется еще один результат, несколько обобщающий лемму 18.

Лемма 19. *Пусть $\mu_n(L)=0$, условия леммы 18 на край bL и $P_{j_1\dots j_k}$ не выполняются в единственной точке : $bL\cap P_{j_1\dots j_k}=0$; пусть существует интеграл от $\phi=x_n\omega$ на $L\backslash|p|>\varepsilon$ при $\forall\varepsilon>0$. Тогда интеграл в смысле* *главного значения существует, и справедлива формула :*

$$V.P.\int_L \frac{\phi}{p(x)} = \int_{\mathcal{L}^-} \frac{\phi}{p(x)} - \sum_{k=1}^{n-1}(i\pi)^k \times$$
$$\times\Bigg[\sum_{\nu_k(L)} V.P.\int_{P_{j_1\ldots j_k}} res^k_{P_{j_1\ldots j_k}}\left[\frac{\phi}{p}\right] +$$
$$+\sum_{\mu_k(L)} \int_{P_{j_1\ldots j_k}} res^k_{P_{j_1\ldots j_k}}\left[\frac{\phi}{p}\right]\Bigg]. \qquad (7.17)$$

Доказательство. Порядок особенности подынтегральной формы в точке $x = 0$ равен $(n-1)$. Поэтому вычет порядка n в точке $x = 0$ равен нулю. Применим формулу (7.14). В результате получим (7.17). Если $k \neq n-1$, тогда будем последовательно применять (7.17), понижая размерность интеграла в смысле главного значения. Получим сумму интегралов от голоморфных форм. Причем, если $k = n-1$, тогда интеграл не имеет особенности (в точке $x = 0$ форма ϕ обращается в нуль) и, следовательно, ограничен. То есть ограничен и интеграл в правой части (7.17). Утверждение доказано.

7.2.2 Асимптотика интеграла при $z = \mathrm{const}$

В этом пункте исследуется интеграл (7.5) в, так называемом, случае общего положения. Наша цель - представить (7.5) в виде суммы интегралов по поверхности, обходящей особенности подынтегральной функции, и интегралов (возможно в смысле главного значения) меньшей размерности. Далее будем последовательно понижать размерность интегралов в смысле главного значения до тех пор, пока не получится сумма интегралов без особенностей подынтегральной функции или одномерный интеграл Коши. Затем применим результаты [78, 4].

Следуя [4], допустимой будем называть такую область некоторого многообразия L, для которой выполнено условие $\Re(iS)|_{x\in L} \leq 0$.

Лемма 20. *Пусть выполнены условия леммы 18 и условия (7.7), (7.8),* *тогда :*

$$V.P.\int_L \frac{\exp(itS)\omega}{p(x)} = \int_{L^-} \frac{\exp(itS)\omega}{p(x)} - \sum_{k=1}^{n-1}(i\pi)^k \times$$

$$\times\Bigg[\sum_{\nu_k(L)} V.P.\int_{P_{j_1\cdots j_k}\cap L} \exp(itS) res^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\frac{\omega}{p}\right]\prod_{l=1}^k sgn\big[\partial_{p_{j_l}}S\big] +$$

$$+\sum_{\mu_k(L)}\int_{P_{j_1\cdots j_k}\cap L}\exp(itS) res^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\frac{\omega}{p}\right]\prod_{l=1}^k sgn\big[\partial_{p_{j_l}}S\big]\Bigg]$$

$$-\sum_{\mu_n(L)}(i\pi)^n res^n_{P_{j_1\cdots j_n}}\left[\frac{\omega}{p}\right]\Bigg[\exp(itS)\prod_{l=1}^n sgn\big[\partial_{p_{j_l}}S\big]\Bigg]|_{P_{j_1\cdots j_n}}. \quad (7.18)$$

Здесь L^- - контур, обходящий нули $p(x)$ по допустимой области границы Лере вещественного многообразия P; $\quad P_{j_l} \in \mu_k(L)\cup\nu_k(L)$.

Доказательство Согласно лемме 18 при выполнении условий теоремы 27 интеграл (7.5) существует. Рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon = \int_{L^-}\frac{\exp(itS)\omega}{p(x)} - \int_{l_\varepsilon^-}\frac{\exp(itS)\omega}{p(x)}, \quad (7.19)$$

здесь L^- - контур, обходящий нули p(x) по допустимой области границы Лере вещественного многообразия P, $\quad l_\varepsilon^-$ - допустимая область границы Лере вещественного многообразия P.

Пусть в интеграле $I_\varepsilon \quad \varepsilon \to 0$. Тогда, в соответствии с леммой о сложных вычетах [2], с.150 получим интегралы правой части (7.18). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 27. Применим лемму 20 к интегралу (7.5). В результате получим формулу (7.18). В первом слагаемом, интеграле по L^-, поверхность интегрирования обходит особенности по допустимым областям. Обозначим этот интеграл через $R(t)$. Асимптотика подобных интегралов построена в [4], с.221:

$$R = \sum_{m=1}^{M} t^{-\gamma_m}\exp(itS(x^{(m)},z))\sum_{\alpha_m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_{m\alpha_k}t^{-\alpha_m}(\ln t)^k, \quad (7.20)$$

где $x^{(m)}$ - стационарная точка, γ_m - некоторые положительные числа, α_m - ограниченная снизу последовательность положительных чисел. Если фазы подынтегральных экспонент не имеют стационарных точек, тогда:

$$R = O(t^{-M}), \quad \text{для} \forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{при} \quad t\to\infty. \quad (7.21)$$

Подынтегральные формы в интегралах по многообразиям из множества $\mu_k(\mathbb{R}^n)$ не содержат особенностей. Структура асимптотики этих интегралов аналогична (7.20), если имеются стационарные точки фазы подынтегральной экспоненты, и (7.21) - если стационарных точек нет.

Рассмотрим интеграл по $P_{j_1\cdots j_k} \in \nu_k(\mathbb{R}^n), \quad \forall k = 1, \ldots, n-1$.

$$I^{\nu}_{P_{j_1\cdots j_k}} = V.P. \int_{P_{j_1\cdots j_k}} \exp(itS) \prod_{l=1}^{k} \operatorname{sgn}\big[\partial_{p_{j_l}} S\big] \operatorname{res}^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\big[\frac{\omega}{p}\big].$$

По условию теоремы 27 $(\partial_{p_l} S^{j_1\cdots j_k} = 0) \cap P_{j_1\ldots j_k l}$ - $(n-k-1)$-мерно пренебрежимо для $\forall l \neq j_1, \ldots, j_n$. Поэтому интеграл можно разбить на сумму интегралов по областям знакоопределенности функции $\partial_{p_l} S^{j_1\cdots j_k}$, где $P_{j_1\ldots j_k l} \neq \varnothing$. В силу леммы 18 каждый из этих интегралов существует. К каждому из получившихся интегралов в смысле главного значения еще раз применим формулу (7.18). В результате размерность интегралов в смысле главного значения понизится еще на единицу. Последовательно применяя формулу (7.18) для интегралов в смысле главного значения, получим последовательность:

$$\begin{gathered} I \mapsto \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} (i\pi)^k I^{\nu}_{P_{j_1\cdots j_k l}} + \\ +(i\pi)^n \textstyle\sum_{\mu_n} c_j \exp(itS)|_{x\in\mu_n} \operatorname{res}^n_{\mu_n}\big[\frac{\omega}{p}\big] \prod_{l=1}^{n} \operatorname{sgn}\big[\partial_{p_{j_l}} S\big] + \\ +\mathcal{O}(t^{-\gamma}) \mapsto \ldots \mapsto \\ \mapsto \textstyle\sum_{\mu_n(\mathbb{R}^n)} N_g \exp(itS)|_{x\in\mu_n} \operatorname{res}^n_{\mu_n}\big[\frac{\omega}{p}\big] + \mathcal{O}(t^{-\gamma}). \end{gathered} \tag{7.22}$$

Здесь все точки из $\mu_n(\mathbb{R}^n)$ занумерованы индексом g; целое число N_g вычисляется по формуле:

$$\begin{gathered} N_g = \textstyle\prod_{l=1}^{n} \operatorname{sgn}\big[\partial_{p_{j_l}} S\big] + \\ + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\nu_k(\mathbb{R}^n)} \prod_{l=1}^{k} \operatorname{sgn}\big[\partial_{p_{j_l}} S\big] \prod_{m=k+1}^{n} \operatorname{sgn}\big[\partial_{p_{j_m}} S^{j_1\cdots j_k}\big]. \end{gathered} \tag{7.23}$$

В (7.22) через $\mathcal{O}(t^{-\gamma})$ обозначена асимптотика интегралов от голоморфных форм. Сами интегралы для краткости не приводятся.

Для завершения доказательства остается посчитать вычет Лере степени n. В соответствии с замечанием об ориентации границы имеем:

$$\operatorname{res}^n_{P_{j_1\cdots j_n}}\big[\frac{\omega}{p}\big] = \pm \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(p_{j_1}, \ldots, p_{j_n})} \frac{\Omega(x)}{p_{j_{n+1}} \ldots p_{j_N}}|_{x=x^g},$$

где $x^{(g)} \in P_{j_1 \dots j_n}$, знак плюс ставится, если преобразование $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (p_{j_1}, \dots, p_{j_n})$ сохраняет ориентацию и минус - в противном случае. Из последовательности (7.22) следует утверждение теоремы 27.

Отдельно сформулируем результат для случая, когда все граничные стационарные точки на всех рассматриваемых здесь многообразиях $P_{j_1,\dots,j_k}$, где $k = 1, \dots, n-1$, $x \in \mathbb{R}$ невырождены. Тогда для построения асимптотик интегралов от голоморфных форм можно воспользоваться результатами [78].

Теорема 29. *Пусть все стационарные точки функции $S(x,z)$ по x и граничные стационарные точки $S(x,z)$ на всех многообразиях $P_{j_1 \dots j_k}$, где $k = 1, \dots, n-1$ невырождены, и выполнены условия теоремы 27.*

1) Если $\cap_{k=1}^{n} P_{j_k} = \{x_{(g)}\}_{g=1}^{G}$, $x \in \mathbb{R}$, тогда:

$$I = \sum_{g=1}^{G} a_g \exp(itS(x^{(g)}, z)) + O(t^{-1/2}).$$

2) Если $n > M = \max(m)$, где $\cap_{k=1}^{m} P_{j_k} \neq \varnothing$, $\{x_c^{(g)}\}$ - набор граничных стационарных точек функции $S(x,z)$ по x на всех многообразиях $P_{j_1 \dots j_M}$, $j_k = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$ тогда:

$$I = t^{-(n-M)/2} \sum_{g=1}^{G} b_g \exp(itS(x_c^{(g)}, z)) + O(t^{-(n-M)}).$$

7.2.3 Равномерная зависимость от параметра

Доказательство теоремы 28. Используем стандартный прием [78]: продифференцируем интеграл $I(t,z)$ по z:

$$\partial_z I = -V.P. \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\Omega(x) 2it(x_n - z) \exp(itS(x,z))}{p(x)} =$$

$$= 2itzI - 2itV.P. \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\Omega(x) x_n \exp(itS(x,z))}{p(x)}.$$

В результате получается дифференциальное уравнение:

$$\partial_z I - 2itzI = -2itJ,$$

где
$$J(z,t) = V.P.\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\Omega(x) x_n \exp(itS(x,z))}{p(x)}.$$
Заменим переменную z на $y = z\sqrt{t}$. В результате для $I(x,z)$ получим уравнение:
$$\partial_y I - 2iyI = -2i\sqrt{t}J(y,t). \tag{7.24}$$
Функция $J(y,t)$ в правой части (7.24) имеет вид :
$$J(y,t) = \exp(iy^2)\ \times$$
$$\times V.P.\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\Omega(x) x_n \exp(it\sum_{k=1}^{n-1}(x_k-1)^2 + i(tx_n^2 + 2x_n y\sqrt{t}))}{p(x)}.$$
Исследуем асимптотику правой части (7.24). Здесь могут быть два случая. Во-первых,- $p_j(x) \equiv x_n$ для некоторого j, тогда для построения асимптотики J можно применить теорему 29 и
$$J(y,t) = t^{-1/2}\exp(it(n-1))b + O(t^{-1}).$$
Во-вторых, - $p_j(x) \not\equiv x_n$ для $\forall j = 1,\dots,n$. Этот случай более общий. Здесь нельзя непосредственно воспользоваться теоремой 29, так как при $y = 0$ не выполняется условие (7.8). С другой стороны, в точке $x = 0$ амплитуда $x_n\Omega = 0$. Воспользуемся этим для построения асимптотики интеграла $J(y,t)$ равномерно по y. Пусть выполнены условия теоремы 28, тогда справедлива формула:
$$\begin{aligned} J(y,t) = \quad & \exp(iy^2)\int_{L^-}\tfrac{\exp(it\psi(x;y,t))\phi}{p(x)} = \int_{L^-}\tfrac{\exp(i\psi(x;y,t))\phi}{p(x)} - \\ & -\sum_{k=1}^{n-1}(i\pi)^k\Bigg[\sum_{\nu_k(L)} V.P.\int_{P_{j_1\cdots j_k}\cap L}\exp(it\psi(x;y,t))\times \\ & \times \mathrm{res}^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\tfrac{\phi}{p}\right]\prod_{l=1}^k \mathrm{sgn}\left[\partial_{p_{j_l}}\psi(x;y,t)\right] + \\ & + \sum_{\mu_k(L)}\int_{P_{j_1\cdots j_k}\cap L}\exp(it\psi(x;y,t))\mathrm{res}^k_{P_{j_1\cdots j_k}}\left[\tfrac{\phi}{p}\right]\times \\ & \times\prod_{l=1}^k \mathrm{sgn}\left[\partial_{p_{j_l}}\psi(x;y,t)\right]\Bigg]. \end{aligned} \tag{7.25}$$
Здесь $L = \mathbb{R}^n$, фаза экспоненты : $\psi(x;y,t) = t\sum_{k=1}^{n-1}(x_k-1)^2 + i(tx_n^2 + 2x_n y\sqrt{t}))$, дифференциальная форма $\phi = x_n\omega$, где Ω быстро убывает при $|x| \to \infty$ в окрестности $x \in \mathbb{R}^n$.

Формула (7.25) о понижении порядка интеграла в смысле главного значения доказывается так же, как и формула (7.18). Она верна не только для $L = \mathbb{R}^n$, но и для всех многообразий с псевдокраем, удовлетворяющих условиям леммы 19. Последовательно ее применяя, получим, согласно лемме 19, сумму римановых интегралов. По условию теоремы 28 стационарные точки фаз подынтегральных экспонент невырождены, тогда из результатов [78] следует равенство :

$$J(y,t) = t^{-1/2}\exp(it(n-1))b_1 + O(t^{-1}).$$

Подставим эту формулу в уравнение (7.24):

$$\partial_y I - 2iyI = -2i\exp(it(n-1))b_1 + O(t^{-1/2}).$$

Асимптотика по t решения этого уравнения имеет вид (7.11), где $B = -b_1$. Теорема 28 доказана.

Литература

[1] Абловиц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1989.

[2] Айзенберг Л.А.,Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск, Наука, 1979, 368 с..

[3] Андерс И.А., Котляров В.П., Хруслов Е.Я. Криволинейные асимптотические солитоны уравнения Кадомцева-Петвиашвили. ТМФ, 1994, т.99, n1, с.27-35.

[4] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.

[5] Ахманов с.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНИТИ, 1964.

[6] Бикбаев Р.Ф., Тарасов В.О. Неоднородная краевая задача на полуоси и на отрезке для уравнения sine-Gordon. Алгебра и анализ, 1991, т.3, n4, с.78–99.

[7] Бурцев С.П. Затухание колебаний солитона в средах с отрицательным законом дисперсии. ЖЭТФ, 1985, т.88, с.461-469.

[8] Буслаев В.С. Использование детерминантного представления решений уравнения Кортевега-де Фриза для исследования их асимптотического поведения при больших временах., УМН, т.36(4), 1981, с.217-218.

[9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

[10] Гадыльшин Р.Р., Киселев О.М. О бессолитонной структуре возмущенного солитонного решения уравнения Деви-Стюартсона. ТМФ, 1996, т.106, n2, с.167-173.

[11] Гадыльшин Р.Р., Киселев О.М. Структурная неустойчивость солитона уравнения Деви-Стюартсона II. ТМФ, 1999, т.118, n3, с.354-361.

[12] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

[13] Герджиков В., Христов Е. Об эволюционных уравнениях, решаемых методом обратной задачи рассеяния. I. Спектральная теория. Болг. Физ. Журнал, 1980, т.7, n1, с.28-41.

[14] Герджиков В.С., Христов Е.Х. О разложении по произведениям решений двух систем Дирака. Матем. заметки, 1980, т.28, с.501-512.

[15] Гриневич П.Г. Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера при одной энергии и связанные с ним интегрируемый уравнения математической физики. Дисс. докт. физ.-мат. наук. Черноголовка, 1999.

[16] Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1980, т.15, с.3-94.

[17] Доброхотов С.Ю. Резонансная поправка к адиабатически возмущенному конечнозонному почти периодическому решению уравнения Кортевега-де Фриза. Матем. заметки, 1988, т.44, n4, с.551-555.

[18] Доброхотов С.Ю. Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шредингера с быстроосциллирующим конечнозонным потенциалом. Матем. заметки, 1988, т.44, n3, с.319-340.

[19] Доброхотов С.Ю., Кричевер И.М. Многофазные решения уравнения Бенджамина-Оно и их усреднения. Матем. заметки, 1991, т.49, n6, с.42-59.

[20] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.

[21] Дрюма В.С. Об аналитическом решении двуммерного уравнения Кортевега-де Вриза. Письма в ЖЭТФ, 1974, т.19, с.753-757.

[22] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозоные линейные операторы и абелевы многообразия. УМН, 1976, т.31, n1, с.55-136.

[23] Дубровский В.Г. Применение метода обратной задачи к построению точных решений 2+1-мерных интенрируемых нелинейных эволюционных уравнений. Дисс. докт. физ.-матем. наук, Новосибирск, 1999.

[24] Захаров В.Е. Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов. Письма в ЖЭТФ, 1985, т.22, с.364.

[25] Захаров В.Е., Манаков С.В. Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи, ЖЭТФ, т.71, 1976, с.203-215.

[26] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солтонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

[27] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде. ЖЭТФ, 1971, т.61, с.118-134.

[28] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом задачи рассеяния. I. Функц. анализ и его прил., 1974, т.6, n3, с.43-53.

[29] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. Москва, Наука, 1989.

[30] Итс А.Р. Асимптотика решений нелинейного уравнения Шредингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т.261(1), 1981, с.14-18.

[31] Итс А.Р., Петров В.Э. Изомонодромные решения уравнения Sine-Gordon и временная асимптотика его быстроубывающих решений. ДАН СССР, 1982, т.265, n3, с.1302–1304.

[32] Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах. ДАН СССР,1970, т.192, n4, с. 753-756

[33] Калякин Л.А. Длинноволновые асимптотики решений многомерного уравнения Буссинеска. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988, с. 28-44.

[34] Калякин Л.А. Длинноволновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем. УМН, 1989, т.44, n1, с.5-34.

[35] Калякин Л.А. Возмущение солитона КдВ. ТМФ, 1992, т.l92, с.62–77.

[36] Карпман В.И., Маслов Е.М. Структура хвостов, образующихся при воздействии возмущений на солитоны. ЖЭТФ, 1977, т.73, с.537.

[37] Киселев О.М. Асимптотика кинка возмущенного уравнения sine-Gordon. ТМФ, 1992, 93, n1, с.39-48. с.39–48.

[38] Киселев О.М. Решение задачи Гурса для системы Максвелла-Блоха. ТМФ, 1994, т.98, n1, с.29-37.

[39] Киселев О.М. Формальное решение задачи Гурса для уравнения синус-Гордон. В кн. Интегрируемость в динамических системах. Уфа, 1994, с.17-26.

[40] Киселев О.М. Асимптотика многомерного интеграла Коши с быстро осциллирующей экспонентой. Матем. заметки, 1995, т.58, вып.2, с.231-242.

[41] Киселев О.М. Метод Фурье для линеаризованного уравнения Деви-Стюартсона I. В кн. Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. III. Дифференциальные уравнения. Уфа, 1996, с.93-97.

[42] Киселев О.М. Асимтпотика бессолитонного решения уравнения Деви-Стюартсона II. Дифференциальные уравнения, 1997, т.33, n6, с.812-819.

[43] Киселев О.М. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Деви-Стюартсона I.Теор.Матем.Физ., 1998, т.114, n1, с.104-114.

[44] Киселев О.М. Базисные функции, связанные с двумерной системой Дирака. Функц. анализ и его приложения,1998, т.32, n1, с.56-59.

[45] Киселев О.М. Асимптотика решения двумерной системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами. Матем. сборник, 1999, т190, n2, с.71-92.

[46] Киселев О.М. Возмущение уединенной волны нелинейного уравнения Клейна-Гордона. Сибирский математический журнал, 2000, т.41, n2, с.345-358.

[47] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[48] Кричевер И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методом алгебраической геометрии. Функцю анализ и его прил.. 1977, т.11, n1, с.15-31.

[49] Кричевер И.М. Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения Sine-Gordon. ДАН СССР, 1980, т.253, n2, с.288–292

[50] Кричевер И.М. "Гессианы"интегралов уравнения КдФ и возмущения конечнозонных решений. ДАН СССР, 1983, т.270, n6, с.1213-1217.

[51] Кричевер И.М. Эволюция уитемовской зоны в теории Кортевега-де Фриза. ДАН СССР, 1987, т.295, n2, с.345-348.

[52] Кричевер И.М. Метод усреднения для двумерных "интегрируемых"уравнений. Функциональный анализ и его прил., 1988, т.22, n3, с.37-52.

[53] Кричевер И.М. Спектральная теория двумерных периодических операторов. УМН, 1989, т.44, n2, с.121-184.

[54] Кулиш П.П., Липовский В.Д. О гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи для уравнений Дэви-Стюартсона. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, 1987, т.54, с.161-.

[55] Лезнов А.Н., Савельев М.В., Смирнов В.Г. Теория представлений групп и интегрирование нелинейных динамических систем. ТМФ, 1981, т.48, n1, с.3–12.

[56] Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. Москва, Ин.лит., 1961.

[57] Липовский В.Д. Гамильтонова структура уравнения КП-II в классе убывающих данных Коши. Функц.анал. и его прил., т.20, n4, с.35-45, (1986).

[58] Манаков С.В. Нелинейная дифракция Фраунгофера, ЖЭТФ, т.65(10), 1973, с.1392-1398

[59] Маслов Е.М. К теории возмущений солитонов во втором приближении. ТМФ, 1980, т.42, n3, с.362-373.

[60] Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией. УМН, т.36, n3, с.63-126.

[61] Нижник Л.П. Обратные задачи для гиперболических уравнений. Наукова думка, Киев, 1991, 232 с..

[62] Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. Функц. анализ и его прил., т.8, n3, с.54-66.

[63] Новиков Р. Г., Хенкин Г.М. $\bar{\partial}$-уравнение в многомерной задаче рассеяния. УМН, 1987, т.42, вып. 3(255), с. 93-152.

[64] Новокшенов В.Ю. Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера., ДАН СССР, т.251(4), 1980, с.799-801

[65] Новокшенов В.Ю. Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для двумерного обобщения цепочки Тоды. Изв. АН СССР, сер. матем., 1984 т.48(2), с.372-410.

[66] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М. Мир, 1989.

[67] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

[68] Остапенко Д.Ю., Паль-Валь А.П., Хруслов Е.Я. Равномерные асимптотические формулы для криволинейных солитонов уравнений Кадомцева-Петвиашвили. ТМФ, 1996, т.108, n2, с.205-211.

[69] Пелиновский Д.Е., частное сообщение.

[70] Пелиновский Д.Е., Степанянц Ю.А. Самофокусированная неустойчивость плоских солитонов в средах с положительной дисперсией. ЖЭТФ, 1993, т.104, с. 3387-3400

[71] Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989, 200с..

[72] Салль М. Уравнения Деви-Стюартсона. Записки научн. семин. ЛОМИ, 1990, т.180, с.161-169.

[73] Сахнович А.Л. Задача Гурса для уравнения Синус–Гордон. Докл. АН УССР, сер. А., физ.–мат. и техн. науки, 1989, n12, с.14–17

[74] Склянин Е.К. Граничные условия для интегрируемых уравнений. Функцион. анализ и его прил., 1987, т.21, n1, с.86–87.

[75] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.:Наука, 1986.

[76] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Часть I. Москва, Ин. лит., 1960.

[77] Фаминский А.В. Задача Коши для обобщенного уравнения КП. Сиб. Матем. Журн., 1992, т.33, с. 160-172.

[78] Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

[79] Филиппов А.Т. Многоликий солитон. М. Наука, 1986.

[80] Хабибуллин И.Т. Преобразование Бэклунда и интегрируемые начально–краевые задачи. Матем. заметки, 1991, т.49, n4, с.130–137.

[81] Хабибуллин И.Т. Интегрируемая начально-краевая задача на полуплоскости для уравнений Ишимори и Деви-Стюартсона. ИМ сВЦ, Уфа, 1991, с.50-59.

[82] Хабибуллин И.Т. Начально-краевая задача для уравнения Ишимори, совместимая с методом обратной задачи рассеяния. ТМФ, 1992, т.91, n3, с.363-376.

[83] Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы. М.: Мир, 1969, 223 с..

[84] Шабат А.Б. Об уравнении Кортевега- де Фриза. ДАН СССР, т.211(6), 1973, с.1310-1313.

[85] Шабат А.Б. Нелинейные эволюционные уравнения и задача Римана. Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. М.: МГУ, 1978, с. 242–245.

[86] Шакирьянов М.М. Разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений типа Дэви-Стюартсона. Интегрируемость в динамических системах. ИМ с ВЦ РАН, Уфа, 1994, с.49-61.

[87] Шварц Л. Анализ, М.: Мир, 1972. Т. 1,2.

[88] Ablowitz M.J., D. Bar Yaacov, A.S.Fokas. On the inverse scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equation. Stud. in Appl. Math. 1983, v.69, pp.135-143.

[89] Ablowitz M.J., Haberman R. Resonantly coupled nonlinear evolution equations. J. math. phys., 1975, v.16, pp.2301-2305.

[90] Ablowitz M.J.,Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Method for solving sine-Gordon equation. Phys.Rev.Lett., 1973, v.30, pp.1262-1264.

[91] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Nonlinear evolution equations of physical significance. Phys. rev. lett., 1973, v.31, pp.125-127.

[92] Ablowitz M.J., Newell A.C. The decay of the continuous spectrum for the solutions of the Korteveg -de Vries equation. J. Math. Phys., 1973, pp.1277-1284.

[93] Arkadiev V.A., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C. Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey-Stewartson II equation. Physica D, 1989, v. 36, pp.189–197.

[94] Anker D., Freeman N.C. On the soliton solutions for the Davey-Stewartson equation for long waves. Proc. Roy. Soc. London A, 1978, v.360, pp.529-540.

[95] Boiti M., Leon J.JP., Martina L., Pempinelli F. Scattering of localized solitons in the plane. Phys. Lett. A32, 1988, pp.432-439.

[96] Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A. Properties of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili I equation. J. Math. Phys., 1994, v.35, n9, pp.4683-4718.

[97] Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A., Prinary B. Towards an inverse scattering theory foe two-dimensional nondecaying potentials. ТМФ, 1998, т.116, n.1, с.3-53.

[98] Bourdag L.A., Its A.R., Manakov S.V., Matveev V.B., Zakharov V.E. Phys.Lett. A, 1979, n3, pp.205.

[99] Boussinesq J. Theorie des ondeset des remous qui se propagent... J. math. Pures Appl., 1872, v.17, n2, pp.55-108.

[100] Davey A., Stewartson K. On the three-dimensional packets of surfase waves. Proc. R. Soc. London. Ser.A., 1974, v.338, pp.101–110.

[101] Djordjevic V.D., Redekopp L.G. On two-dimensional packets of capillary- gravity waves. J.Fluid Mech., 1977, v.79, pp.703–714.

[102] Dubrovsky V.G. The application of the $\bar{\partial}$-dressing method to some integrable (2+1)-dimensional nonlinear equations. J.Phys. A: Math. and Gen.,v.29, pp.3617-3630.

[103] Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G. Coherent structures for the Ishimory equation.I. Lokalised solitons with stationary boundaries. Phys. 48D, 1991, pp.367-395. Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G.. Coherent structures for the Ishimory equation.II. Time-depend boundaries. Phys. 55D, 1992, pp.1-13.

[104] Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G. $\bar{\partial}$-dressing and exact solutions for the (2+1)-dimensional Harry Dym equation. J. Phys. A: Math. and Gen., 1994, v.27, pp.4619-4628.

[105] Flaschka H., Forest M.G., McLaughlin D.W. Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the KdV equation. Commun.Pure Apll. Math., 1980, v.33, pp.739-784.

[106] Fokas A.S., Ablowitz M.J. On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane. J. Math. Phys., 1984, v.25, p.2494.

[107] Fokas A.S, Its A.R. Soliton generation for initial-boundary value problems. Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, pp.3117-3120.

[108] Fokas A.S, Its A.R. An initial-boundary problem for the sine-Gordon equation in laboratory coordinates. ТМФ, 1992, v.92, n3, pp.386–403.

[109] Fokas A.S., Santini P.M. Dromions and a boundary value prooblem for the Davey-Stewartson I equation. Physica D, 1990, v.44, p.99.

[110] Fokas A.S.,Sung L.J. On the solvalability on the N-wave, Davey-Stewartson and Kadomtsev-Petviashvili equations. Inv. probl., 1992, v.8, pp.673-708.

[111] Gadyl'shin R.R., Kiselev O.M. Asymptotics of perturbed soliton solution for the Davey-Stewartson II equation. http://xxx.lanl.gov/solv-int/9801014.

[112] Gardner C.G., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura K.M. Method for solving the Korteveg-de Vries equation. Phys.Rev.Lett., v.19, pp.1095-1097.

[113] Ghidaglia J.-M., Saut J.-K. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems. Nonlinearity, v.3, 1990, pp.475-506.

[114] Grinevich P.G. Nonsingularity of the direct scattering transform for the KP II equation with real exponentially decaying at infinity potential. Lett. Math. Phys., 1997, v.40, pp.59-73.

[115] Hayashi N., Naumkin P.I., Saut J.-C. Asymptotics for large time of global solutions to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. Comm. in math. phys., 1999, v.201, n3, pp.577-590.

[116] Hayashi N., Hirata H. Global existence and asymptotic behavior in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stevartson system. Nonlinearity,1996, v.9, pp.1387-1409.

[117] Hietarinta J., Hirota R. Multidromion solutions to the Davey-Stewartson equation. Phys.Lett.A, 1990, v.145, p.237.

[118] Ishimori Y. Progr. in Theor. Phys., 1984, v.72, p.33.

[119] V.I.Karpman, E.I. Maslov. The structure of tails, appearing under soliton perturbations. JETPh, 1977, v.73, pp. 537–559.

[120] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators, 1966, Springer–Verlag

[121] Kaup D.J. A perturbation expansion for the Zakharov-Shabat inverse scattering transform. SIAM J.on Appl.Math., 1976, v. 31, pp. 121–133.

[122] Kaup.D.J. Closure of the squared Zakharov-Shabat eigenstates. J.of Math.Anal.and Appl., 1976, v.54, pp.849-864.

[123] Kaup D.J., Newell A.C. The Goursat and Cauchy problems for sine-Gordon equation. SIAM J.Appl.Math., 1978, v.34, pp.37-54.

[124] Kaup D.J. The inverse scattering solution for the full three-wave resonant interaction. Phys. D,1980, v.1, p.45.

[125] Keener J.R., McLaughlin D.J. A Green's function for a linear equation associated with solitons. J.Math.Phys., 1977, v.18, p.2008.

[126] Kiselev O.M. The interaction of a kink with a breather of small amplitude in the ϕ^4-model. Russian Journ. of Math.Phys., 1997, v.5, n1, pp.29-46.

[127] Kiselev O.M. Perturbation theory for the Dirac equation in two-dimensional space. J.Math.Phys., 1998, v.39, pp.2333-2345.

[128] Kiselev O.M. Dromion perturbation for the Davey-Stewartson-1 equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2000, v.7, n4, pp.411-422.

[129] Kiselev O.M. Asymptotic behaviour of a solution of the Kadomtsev-Petviashvili-2 equation. Proceedings of the Steklov's Institute of Mathematics. suppl., 2001, n1, S107-S139.

[130] Kivshar Y.S., Malomed B.A. Solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989, v. 61, n4, pp.763–915.

[131] Konopelchenko B.G., Matkarimov B.T. Inverse spectral transform for nonlinear evolution equation generating the Davey-Stewartson and Ishimory equations. Stud in Appl. Math., 1990, v.82, pp.319-359.

[132] Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. Physica D, 1981, v.3(1-2),pp.420-427.

[133] Manakov S.V., Santini P.M., Takchtadzhyan L.A.// A asymptotic behavior of the solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equations. Phys. Lett. A, 1980, v.75, pp.451-454.

[134] Manakov S.V., Zakharov V.E., Bordag L.A., Its A.R., Matveev V.B. Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction. Phys.Letters, 1977, v.63A, n3, pp.205-206.

[135] Miles J.W. The asymptotic solution of the Korteveg-de Vries equation in the absense of solitons, Stud. Appl. Math., v.60, 1979, pp. 59-72

[136] Miura R.M. Korteveg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. J. Math. Phys., 1968, v.9, pp.1202-1204.

[137] Newell A.C. The inverse scattering transform. Topics in Current Phys., v. 17, 1980, New York, Springer-Verlag, pp. 177–242.

[138] Papanicolaou G.S., Sulem C., Sulem P.L., Wang X.P. The focusing singularity of the Davey-Stewartson equations for gravity-capillary surface waves. Physica D, 1994, v.72, pp.61-86.

[139] Satsuma J., Ablowitz M.J. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems. J. math. phys., 1979, v.20, pp.1496.

[140] Villaroell J., Ablowiz M.J. On the Hamiltonian formalism for the Davey-Stewartson system. Inv. Prob., 1991, v7, pp.451.

[141] Wickenhauser M.V. Inverse scattering for the heat operator and evolution in 2+1 variables, Comm. Math. Phys., 1987, v.108, pp.67-87.

[142] Zabuski N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solitons"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 1965, v.15, pp.240-243.