На правах рукописи

Киселев Олег Михайлович

Многомерные нелинейные интегрируемые уравнения: асимптотики решений и возмущения

01.01.02 -дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Уфа 2001

Работа выполнена в Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Петр Георгиевич Гриневич,
доктор физико-математических наук
Яудат Талгатович Султанаев,
доктор физико-математических наук
Евгений Яковлевич Хруслов.

Ведущая организация: Петербургское Отделение Математического института им. В.А. Стеклова

Защита состоится "21"февраля 2002 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д002.057.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу 450000, г.Уфа, ул. Чернышевского, 112, к.24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики с ВЦ.

Автореферат разослан "19"января 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, С.В.Попенов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение асимптотических свойств решений лежит в основании современных исследований в области нелинейных уравнений математической физики. Достаточно вспомнить, что Дж. Рассел в 1834 заинтересовался уединенной волной из-за неизменности ее специфической формы, сохраняющейся на большом промежутке времени. Да и знаменитое уравнение Кортевега и де Фриза получено как асимптотический предел уравнения для поверхностных волн. Возрождение интереса к уравнению КдФ в шестидесятых годах 20-го века началось с изучения поведения на больших временах цепочки Ферми-Паста-Улама – нелинейно взаимодействующих осцилляторов. Последующие работы М.Крускала и Н.Забусски, а также Гарднера, Грина, Крускала и Миуры привели к открытию солитона, а затем и метода обратной задачи рассеяния. История этого вопроса всесторонне и в подробностях изложена в книгах М. Абловица и Х. Сегура, А. Ньюэлла, а также в замечательной книжке А.Т. Филиппова.

Нелинейные интегрируемые уравнения и метод обратной задачи рассеяния, разработанный для их решений, распахнули новые горизонты в математической физике конца двадцатого века. Это утверждение – вовсе не преувеличение. Достаточно взглянуть на длинные списки статей об интегрируемых уравнениях, приводимые в монографиях. С одной стороны, большое число работ связано с модной темой, и как следствие – появлением новых журналов и выделением фондов на исследования в области нелинейных уравнений. Однако, это только внешняя сторона. На самом деле, причина кроется в методе решения интегрируемых уравнений с помощью обратной задачи рассеяния. Он привел к переосмыслению некоторых известных результатов, а также постановке новых задач.

Метод обратной задачи рассеяния обычно связывает нелинейное уравнение с парой систем линейных уравнений с переменными коэффициентами и дополнительным "спектральным"параметром. Для каждого нелинейного уравнения эта пара своя. Более того, каждому решению нелинейного уравнения соответствует свой вид коэффициентов в системах линейных уравнений. То есть, для изучения свойств решения или какого-либо класса решений нелинейного интегрируемого уравнения с помощью метода обратной задачи рассеяния приходится развивать теорию решений класса линейных систем уравнений с переменными коэффициентами и исследовать свойства их решений в зависимости от дополнительного "спектрального"параметра. Теперь осталось вспомнить, что построение такой теории для одного обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + q(x)u = k^2u$$

длится более ста лет и пока далеко от завершения.

Вместо исследования столь широкого круга задач обычно ограничиваются изучением свойств решений небольшого списка интегрируемых уравнений. Среди (1+1)-мерных уравнений (одна пространственная переменная и временная) обычно говорят об уравнении Кортевега-де Фриза, нелинейном уравнении Шредингера, уравнении синус-Гордона, системе N-волн. Ограничен и список классов изучаемых решений. Прежде всего это решения, имеющие конечное число параметров – солитонные и конечнозонные.

Получить решение в виде уединенной волны (солитона) с помощью редукции к обыкновенному уравнению для перечисленных интегрируемых уравнений достаточно просто. Такое решение было найдено еще Буссинеском. Нетривиален следующий шаг – построение решения, которое содержит несколько таких волн – солитонов. Преобразования, переводящие одно решение уравнения синус-Гордона в другое, были описаны Бэклундом. Построение конечнозонных решений интегрируемых уравнений опирается на метод обратной задачи рассеяния, но может быть также сведено к решению системы интегрируемых обыкновенных уравнений.

Решения, содержащие функциональный произвол, позволяют решать задачи Коши или Гурса. В общем случае исследование свойств этих решений опирается на метод обратной задачи рассеяния. Перечисленные выше (1+1)-мерные нелинейные интегрируемые уравнения в методе обратной задачи связаны с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечные формулы для решений исходных нелинейных уравнений имеют неявный характер. Их неудобно использовать для каких-либо вычислений без дополнительного, как правило, асимптотического анализа. Более того, зачастую по смыслу исходной задачи интересным оказывается именно асимптотическое поведение решения нелинейного уравнения. Формулы для асимптотик в (1+1)-мерном случае содержат один большой параметр, например, время и один медленно меняющийся, как правило, это отношение пространственной переменной и времени. Для получения равномерных по медленной переменной асимптотических решений используется сингулярная теория возмущений.

Применение теории возмущений к интегрируемым уравнениям позволяет исследовать их неинтегрируемые возмущения. Наиболее полно исследованы возмущения солитонных решений. В теории возмущений солитонных решений один из основных вопросов – вычисление медленной модуляции параметров под воздействием возмущения в течение длительного временного промежутка. Главный член асимптотики, как правило, зависит от параметров решения аналитически. Пионерские работы в этом направлении были выполнены Д. Каупом, а также В.И. Карпманом и Е.М. Масловым.

Среди (2+1)-мерных интегрируемых уравнений (две пространственных переменных и время) чаще всего упоминаются уравнение Кадомцева-Петвиашвили, система Деви-Стюартсона, система N-волн. Можно отметить также и уравнения для двумеризованной цепочки Тоды, относящейся к дискретным (2+1)-мерным моделям. При решении (2+1)-мерных уравнений возникают дополнительные сложности. В отличие от (1+1)-мерных уравнений (2+1)-мерные связаны с системами линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Дополнительный "спектральный" параметр входит в решение вспомогательной линейной системы через краевые условия. По этим причинам формулы решений задач для двумерных интегрируемых уравнений более сложны. Вопрос исследования асимптотических свойств решений (2+1)-мерных уравнений в настоящее время весьма актуален. Однако, список работ на эту тему довольно ограничен. Конечнозонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили с модулированными параметрами были описаны И.М.Кричевером. Среди работ об асимптотиках решений с функциональным произволом известны статьи С.В. Манакова, П. Сантини и Л.А. Тахтаджяна о формальной асимптотике решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили-1, В.Ю. Новокшенова по асимптотике двумеризованной цепочки Тоды, а также И.А Андерса, В.П. Котлярова и Е.Я. Хруслова об асимптотиках неубывающих решений уравнений Кадомцева-Петвиашвили. К этому списку авторов можно еще добавить работы Н.Хаяши и П.И. Наумкина.

При построении асимптотик решений (2+1)-мерных нелинейных уравнений возникают существенные трудности. В первую очередь это связано с зависимостью от дополнительной пространственной переменной. При построении равномерных асимптотик встают задачи с двумя малыми параметрами, не связанными какими-либо соотношениями. Поэтому приходится иметь дело с двойными асимптотиками. Одним из наиболее действенных методов в этой области является метод согласования асимптотических разложений. Еще одно затруднение связано с неаналитической зависимостью вспомогательной линейной задачи от "спектрального параметра". Теория возмущений таких задач существенно отличается от хорошо разработанной теорий возмущений для задач с аналитической зависимостью от параметров.

По существу основным мотивом работ, результаты которых вошли в диссертацию, было желание развить асимптотические методы и теорию возмущений солитонных решений для (2+1)-мерных интегрируемых уравнений.

Цель работы Исследовать асимптотическое поведение при больших значениях времени убывающих по пространственным направлениям решений (2+1)-мерных (две пространственных переменных и время) интегрируемых уравнений. В качестве основных представителей таких уравнений выбраны уравнение Кадомцева-Петвиашвили-2 (КП-2):

$$\partial_x(\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) = -3\partial_y^2 u \tag{1}$$

и уравнения Деви-Стрюартсона(ДС):

$$\begin{gathered} i\partial_t A + \partial_x^2 A + \alpha^2\partial_y^2 A + 2\kappa|A|^2 A + Ap = 0, \\ \partial_x^2 p - \alpha^2\partial_y^2 p = -4\kappa\partial_x^2(|A|^2), \ \ \kappa = \pm 1, \end{gathered} \tag{2}$$

при $\alpha^2 = 1$ эту систему уравнений называют уравнениями ДС-1, при $\alpha^2 = -1$ – ДС-2.

Также рассматриваются и уравнения Ишимори-1:

$$\begin{aligned} \partial_t\vec{S} + \vec{S}\times(\partial_x^2\vec{S} - \partial_y^2\vec{S}) + \partial_x w\partial_y\vec{S} + \partial_y w\partial_x\vec{S} = 0 \\ \partial_x^2 w + \partial_y^2 w - 2\vec{S}(\partial_x\vec{S}\times\partial_y\vec{S}) = 0, \\ \vec{S} = (S_1, S_2, S_3), \ \ \vec{S}^2 = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

В диссертацию включены результаты о временной асимптотике убывающих решений этих уравнений, а также о возмущении солитонных решений уравнений Деви-Стюартсона.

Методика исследования Основным методом построения асимптотик решений в диссертации является согласование асимптотических разложений. Важную роль играют также метод двух масштабов и метод Фурье. Перечисленные методы применяются при построении решений с помощью обратной задачи рассеяния и теории возмущений для возмущенных задач, связанных с интегрируемыми уравнениями.

Научная новизна и теоретическая ценность В диссертацию включены следующие результаты:

- Формальное асимптотическое решение задачи о возмущении алгебраического солитона уравнения Деви-Стюартсона-2. Оказалось, что солитонная структура решения уравнения ДС-2 неустойчива по отношению к малому гладкому финитному возмущению начального условия. Показано, что возмущение приводит к бессолитонным данным рассеяния. Удалось построить главный член формального асимптотического решения, пригодный на временах порядка обратной величины параметра возмущения.

- Исследована асимптотика убывающего решения уравнений Деви-Стюартсона-2 на больших временах. Эта асимптотика и известные явные формулы, связывающие решения уравнений ДС-2 и Ишимори-1, позволили написать также и асимптотику при больших временах решения уравнений Ишимори-1.

- Построена и обоснована асимптотика на больших временах убывающего решения уравнения КП-2. На этом пути исследована асимптотика решения эллиптической системы уравнений второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами, связанная с обратной задачей для уравнения КП-2.

- Построена асимптотика на больших временах убывающего решения уравнения ДС-1. Для этого исследована асимптотика решения нелокальной задачи Римана с быстро осциллирующими коэффициентами.

- Построена теория возмущений гиперболической двумерной системы Дирака – вспомогательной линейной системы, связанной с уравнениями ДС-1. На базе решений двумерной системы Дирака построено обратимое преобразование для достаточно гладких интегрируемых функций. Это позволило разработать метод Фурье для решения линеаризованной системы уравнений ДС-1.

- Построено формальное асимптотическое решение возмущенной системы уравнений ДС-1 с солитоном в главном члене, пригодное на временах порядка обратной величины параметра возмущения.

Самостоятельную теоретическую ценность представляет ряд результатов, полученных в процессе решения поставленных в диссертации задач. С точки зрения темы диссертации они являются вспомогательными, так как связаны с линейными уравнениями. Однако, именно эта связь позволяет их рассматривать в более широком смысле. К таковым относятся:

- Приведенные в диссертации теоремы о представлении функции в виде интегралов по произведениям решений сопряженных двумерных систем Дирака как эллиптического, так и гиперболического типа. В частности, такие представления дают возможность решить линеаризованные уравнения Деви-Стюартсона методом Фурье. Кроме того, полученные интегральные представления распространяют известные результаты о возмущении данных рассеяния при возмущении потенциала для одномерного уравнения Шредингера, на двумерные системы Дирака.

- Формальная асимптотика по двум параметрам собственного значения интегрального оператора, связанного с двумерной эллиптической системой Дирака, неаналически зависящая от одного из параметров.

- Исследование решения двумерной эллиптической системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами. В частности, построены и обоснованы равномерные асимптотики по четырем параметрам.

- Асимптотики многомерных интегралов типа Коши с быстро осциллирующей экспонентой.

Все перечисленные результаты новые.

Апробация работы Результаты, изложенные в диссертации, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. В частности: на международной конференции "Сингулярные пределы диспергирующих волн–2"(Звенигород, 1995), семинаре им. И.Г. Петровского (Москва, 1996), на конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения"(Уфа, 1996), семинаре "День дифракции"(Санкт-Петербург, 1998), на конференции "Точно решаемые модели математической физики"(Челябинск, 1998), на конференции "Солитоны, коллапсы и турбулентность: достижения, развитие и перспективы"(Черноголовка, 1999), на конференции "Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems"(Турция, 2000). В течение 2000 года обзорные доклады на тему диссертации были сделаны в ведущих математических центрах: в Институте математики и механики в Екатеринбурге, на семинаре в Институте низких температур в Харькове, на семинаре в Институте теоретической физики им. Ландау в Черноголовке, на семинаре в Институте проблем механики в Москве, на семинаре в Петербургском отделении математического института им. Стеклова, на семинаре в Институте гидродинамики в Новосибирске, на семинаре в Институте математики им. Соболева в Новосибирске.

Публикации По теме диссертации опубликовано 12 работ. Из совместных работ с Р.Р. Гадыльшиным [1], [2] и [9] на защиту выносятся только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации Диссертационная работа состоит из введения и семи глав. Объем диссертации –206 страниц. Библиография содержит 142 наименования.

Содержание работы

Во введении приведен обзор работ по асимптотикам решений (2+1)-мерных нелинейных интегрируемых уравнений. Сформулированы поставленные задачи и полученные в диссертации результаты.

В первой главе приведены предварительные сведения – алгоритмы решения уравнений ДС-2, КП-2, и Ишимори-1 методом обратной задачи рассеяния. Эти уравнения объединены тем, что в МОЗР решение обратной задачи для них связано с решением эллиптической системы уравнений, обычно называемой $\bar{D}$-проблемой. В этом разделе не уделяется внимание вопросам существования решений с необходимыми свойствами. Формулы этого раздела достаточно хорошо известны и во многом следуют известным работам М.Абловица и А.Фокаса, В.А.Аркадьева, А.К.Погребкова и М.К.Поливанова, а также Б.Г.Конопельченко и Б.Т.Маткаримова. Приведенные в этой главе формулы используются в дальнейшем при исследовании асимптотических свойств решений уравнений ДС-2, КП-2 и Ишимори-1.

Во второй главе рассмотрен вопрос об устойчивости задачи рассеяния по отношению к малому возмущению потенциала. Изучено два различных случая. Если потенциал в системе уравнений достаточно мал, тогда прямая и обратная задачи рассеяния оказываются устойчивыми. В первом разделе второй главы, следуя работе автора [7], подробно и строго исследован именно этот случай. Рассмотрим линеаризованную на q, g систему уравнений ДС-2 (лДС-2):

$$\begin{gathered} i\partial_t U + (\partial_z^2 - \partial_{\bar z}^2)U + (g+\bar g)U + (v+\bar v)q = iF, \\ \partial_{\bar z} v = \partial_z(\bar U q + U\bar q). \end{gathered} \tag{4}$$

Приведем формулу представления гладкой интегрируемой функции в виде интеграла типа Фурье по функциям, связанным с решением задачи

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar z} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q(z,t) \\ \kappa\overline{q(z,t)} & 0 \end{pmatrix} \phi, \tag{5}$$

$$E(-kz)\phi(k,z)|_{|z|\to\infty} = I. \tag{6}$$

Формулу удобно записать, воспользовавшись обозначениями для полуторалинейных форм:

$$(\phi_{(i)}, \psi_{(j)})_f = \int\int_{\mathbb{C}} dz\wedge d\bar z \left(\bar f(z)\,\phi_{1i}(z,k)\overline{\psi_{1j}}(z,k) \; + f(z)\,\phi_{2i}(z,k)\overline{\psi_{2j}}(z,k)\right), \tag{7}$$

$$\langle\phi^{(i)}, \psi^{(j)}\rangle_h = \int\int_{\mathbb{C}} dk\wedge d\bar k \left(\overline{\phi_{i1}}(z,k)\psi_{j1}(z,k)\,\bar h(k) \; - \overline{\phi_{i2}}(z,k)\psi_{j2}(z,k)\,h(k)\right). \tag{8}$$

Здесь $\phi_{(i)}$ – i-тый столбец матрицы ϕ, $\phi^{(i)}$ – i-тая строка матрицы ϕ.

Теорема 1 (О разложении). *Пусть функция q в задаче (5), (6) такая, что q, $|q|$, $\partial_z q$, $\partial_z q$, $\partial_z^2 q$, $\partial_{\bar{z}}^2 q$ – гладкие интегрируемые функции вещественных переменных $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ и выполнено условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int\int dxdy \, \frac{|q(x+iy)|}{|z-(x+iy)|} < 2\pi, \tag{9}$$

тогда функция $u \in C^1 \cap L_1$ представима в виде:

$$u(z) = \frac{-i}{\pi}\langle\phi^{(2)}, \psi^{(2)}\rangle_{\hat{u}}, \tag{10}$$

где коэффициенты разложения $\hat{u}(k)$ определены формулой:

$$\hat{u} = \frac{i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_u. \tag{11}$$

Здесь ψ – решение задачи, сопряженной (5), (6) относительно полуторалинейной формы (7).

Замечание 1. *Условие (9) является достаточным для существования решения задачи (5), (6) при $\forall k \in \mathbb{C}$.*

Специальный характер эволюции решения задачи (5), (6), если q эволюционирует в соответствии с уравнениями ДС-2, переписанными в форме:

$$\begin{aligned} i\partial_t q + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2)q + (g+\overline{g})q = 0, \\ \partial_{\bar{z}} g = -\kappa\partial_z|q|^2, \end{aligned} \tag{12}$$

позволяет воспользоваться разложением (10) для решения начально-краевой задачи для системы уравнений лДС-2.

Теорема 2 (О решении методом Фурье). *Пусть q функция из решения системы (12) удовлетворяет условиям теоремы о разложении при $0 \le t < T_0 = Const$, тогда функцию U из решения начально-краевой задачи для (4):*

$$U|_{t=0} = U_0(z), \quad v|_{|z|\to\infty} = 0 \tag{13}$$

можно представить в виде:

$$U(z,\bar z,t) = \frac{-i}{\pi}\langle \phi^{(2)}, \psi^{(2)}\rangle_{\hat U}, \tag{14}$$

где $\hat U$ *– решение задачи Коши:*

$$\partial_t \hat U - 2i(k^2+\bar k^2)\hat U = \hat F(k,t), \quad \hat U|_{t=0} = \frac{i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_{U_0},$$

здесь: $\hat F(k,t) = \frac{i}{4\pi}(\phi_{(2)}, \psi_{(2)})_F$.

Другой, несколько неожиданный результат, получен для солитонного потенциала, заведомо не удовлетворяющего условию достаточной малости. Оказывается, что солитонная структура данных рассеяния неустойчива по отношению к малому финитному возмущению потенциала. Этот факт был замечен и исследован с помощью сингулярной теории возмущений на формальном уровне в работах Р.Р. Гадыльшина и автора [1, 2]. Подробному описанию результатов этих двух работ посвящен второй раздел второй главы. В третьем разделе также с помощью сингулярной теории возмущений, следуя еще одной совместной работе с Р.Р. Гадыльшиным [9], показано, к каким изменениям в главном члене формального асимптотического решения уравнения ДС-2 ведет неустойчивость задачи рассеяния.

В третьей главе диссертации приведены асимптотики по времени убывающих решений уравнений ДС-2, Ишимори-1 и КП-2. Сформулируем утверждение об асимптотике решения уравнений ДС-2:

Теорема 3. *Пусть данные рассеяния задачи (5), (6) состоят из функции* $b(k)$ *такой, что она сама и все ее производные по* k *и* $\bar k$ *до второго порядка – гладкие интегрируемые в* $\mathbb{R}^2$, *функция* $kb(k)$ *интегрируема в* $\mathbb{R}^2$ *и* $b(k)$ *удовлетворяет требованию:*

$$\frac{1}{\pi}\max_{\zeta\in\mathbb{C}} \int\int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \,\frac{|b(\lambda+i\mu)|}{|\lambda+i\mu-\zeta|} < 1, \tag{15}$$

тогда асимптотика при $t\to\infty$ *решения ДС-2 имеет вид:*

$$q(z,t) = t^{-1}\,\frac{1}{2}\,b\Big(\frac{iz}{4t}\Big)\,\exp\left(\frac{it}{8}(\xi^2+\bar\xi^2)\right) + O(t^{-5/4}), \tag{16}$$

$$g = -t^{-2}\,V.P.\int\int_{\mathbb{C}} \frac{dv\wedge d\bar v\,|b\big(\frac{iv}{4t}\big)|^2}{2i\pi(v-z)^2} + O(t^{-9/4}), \tag{17}$$

где $\xi = z/t$, равномерно по $z \in \mathbb{C}$.

Обозначим $\tilde{S} = \vec{S}\vec{\sigma}$, где $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ – решение уравнения Ишимори -1 (при $\alpha^2 = -1$), $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, а $\sigma_{1,2,3}$ – матрицы Паули. Асимптотика решения уравнений Ишимори-1 при $t \to \infty$ с краевым условием $\tilde{S}|_{|z|\to\infty} = \sigma_3$ может быть получена из формулы для асимптотики решения задачи рассеяния, построенной в предыдущем разделе:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{t^{1/2}} \overset{1}{\beta} \\ \frac{2}{t^{1/2}} \overset{1}{\beta} & 1 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}), \tag{18}$$

где $\overset{1}{\beta}(l)$– решение краевой задачи:

$$\partial_l \overset{1}{\beta} + 4il \overset{1}{\beta} = b(i\xi/4), \quad \overset{1}{\beta}|_{|l|\to\infty} = 0.$$

Переменные l и ξ связаны с переменными x, y, t формулами:

$$l = \frac{x+iy}{\sqrt{t}}, \quad \xi = \frac{x+iy}{t}.$$

Функция $b(k)$ удовлетворяет условиям теоремы 3

Данные рассеяния для уравнения Кадомцева-Петвиашвили-2 вычисляются с помощью решения задачи

$$-\partial_y\varphi + \partial_x^2\varphi + 2ik\partial_x\varphi + u_0\varphi = 0, \quad \varphi|_{|k|\to\infty} = 1$$

по формуле:

$$\begin{aligned} F(k) = \quad & (2\pi)^{-1}\mathrm{sgn}(-\Re(k)) \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y)\varphi(x,y,k,0) \times \\ & \times \exp(-i(k+\bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y). \end{aligned}$$

Сформулируем основной результат диссертации, касающийся асимптотики решения уравнения КП-2.

Теорема 4. *Пусть начальная функция $u_0(x,y)$ такова, что ее данные рассеяния обладают свойством: $(1+|k|)F \in L_1 \cap C$, $\partial^\alpha F \in L_1 \cap C$ при $\Re(k) \neq 0$, $|a| \leq 2$, и выполнено условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int\int_{\mathbb{R}^2} d\kappa d\lambda \left| \frac{F(\kappa + i\lambda)}{\kappa + i\lambda - z} \right| < \pi. \tag{19}$$

Тогда решение задачи Коши для уравнения КП-2 существует и единственно при $\forall t > 0$. Его асимптотика при $t \to \infty$ различна в различных направлениях, которые описываются характеристическими переменными $\xi = x/t$ и $\eta = y/t$:
1) при $-(12\xi + \eta^2)t^{1/3} \gg 1$:

$$u(x,y,t) = -4t^{-1} \exp\left(- 11it\sqrt{-\frac{y^2}{t^2} - 12\frac{x}{t}} \right) \times$$
$$\times \left[\frac{\pi}{12i\sqrt{-\eta^2 - 12\xi}} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\eta^2 - 12\xi} + \frac{i\eta}{12} \right) + o(t^{-1}) \right] + c.c.;$$

2) при $(12\xi + \eta^2)t^{1/3} \gg 1$:

$$u = o(t^{-1});$$

при $|12\xi + 12\eta^2| \ll 1$:

$$u(x,y,t) = 8it^{-1}\sqrt{\pi} f(i\eta/12) \left(\int_0^\infty dp_1 \sqrt{p_1} \cos\left(8p_1^3 - zp_1 \right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty dp_1 \sqrt{p_1} \sin\left(8p_1^3 - zp_1 \right) \right) + o(t^{-1}).$$

Здесь

$$z = 8\left(\frac{y^2}{12t^{4/3}} + \frac{x}{t^{1/3}} \right);$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, u_0(x,y) \varphi(x,y,k,0) \times$$
$$\times \exp(-i(k + \bar{k})x - (k^2 - \bar{k}^2)y).$$

Области пригодности различных асимптотик, указанные в теореме, пересекаются. В областях пересечения асимптотики совпадают. Поэтому можно представить составную асимптотику решения, равномерно в плоскости переменных x, y.

В четвертой главе излагается метод обратной задачи и нелокальная задача Римана для уравнения ДС-1. Приведен алгоритм решения уравнений ДС-1 с помощью МОЗР. Он был предложен в работе Фокаса и Абловица. Однако, решения, построенные в рамках их подхода, не содержали уединенных волн. Позднее Бойти, Леон, Мартина и Пемпинелли построили пространственно локализованные решения ДС-1. Алгоритм МОЗР, включающий такие решения, был предложен Фокасом и Сантини. Он кратко изложен в этой главе.

В следующей, пятой главе диссертации, МОЗР используется для построения асимптотики при $t \to \infty$ решения задачи Коши:

$$i\partial_t Q + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + \frac{\kappa}{2}\left(\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \partial_\eta |Q|^2 + \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \partial_\xi |Q|^2\right) Q = 0, \quad (20)$$

$$Q|_{t=0} = Q_0(\xi, \eta).$$

В такой форме можно записать уравнение Деви-Стюартсона-1 с нулевыми граничными условиями для компонент $g_{1,2}$ при $\xi \to -\infty$ и $\eta \to -\infty$ соответственно.

При $t \to \infty$ построенное решение имеет порядок $O(t^{-1})$ и быстро осциллирует. Огибающая осцилляций определяется данными рассеяния и зависит от характерных переменных ξ/t и η/t.

Для решения задачи Коши для (20) используются данные рассеяния в начальный момент времени:

$$S(k,l) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, \psi_{22}^{-}(\xi,\eta,k,0)\exp(il\eta)Q_0(\xi,\eta).$$

Здесь $\psi_{22}^{-}(\xi,\eta,k,0)$ – решение задачи Гурса для двумерной системы Дирака:

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi & 0 \\ 0 & \partial_\eta \end{pmatrix}\psi = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}\psi,$$

с условием:

$$\psi_{21}^{-}|_{\eta\to-\infty} = 0, \quad \psi_{22}^{-}|_{\eta\to-\infty} = \exp(-ik\xi).$$

Сформулируем утверждение об асимптотике решения уравнения (20).

Теорема 5. *Пусть* $S(k,l) \in C^2$, $\partial^\alpha S(k,l) \in L_1$, *где* $\alpha = 1,2$ *и удовлетворяет условию:*

$$\tfrac{1}{2\pi}||S(l,k)||_{L_1} + \tfrac{1}{\pi}||\int_{-\infty}^{\infty} dl|\partial_k S(l,k)|\,||_C + \tfrac{1}{\pi}\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty}|S(l,k)|dl\right|\right|_C +$$

$$+\tfrac{1}{\pi}\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_k S(k,l)|dl\right|\right|_C + \tfrac{1}{\pi}\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty}|S(k,l)|dl\right|\right|_C < 1, \quad (21)$$

тогда при $t \to \infty$ асимптотика решения уравнения (20) имеет вид:

$$Q(\xi,\eta,t) = \frac{1}{t}\,\exp\big(\frac{it}{4}(x^2+y^2)\big)\Bigg[\Bigg(iS(\frac{x}{2},\frac{y}{2}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\overset{0}{\mu}_1(x,y,\frac{x}{2})\Bigg) + +O(t^{-3/2})\Bigg]. \quad (22)$$

Здесь $x = \xi/t$, $\quad y = \eta/t$; функция $\overset{0}{\mu}_1(x,y,k)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mu}_1(x,y,k) &= \int_{-\infty}^{y/2} dl\ \overset{0}{\mu}_2(x,y,l)S(k,l),\\ \overset{0}{\mu}_2(x,y,k) &= \int_{x/2}^{\infty} dl\,\kappa\bar{S}(l,k)S(l,k) + \int_{x/2}^{\infty} dl\ \overset{0}{\mu}_1(x,y,l)\bar{S}(l,k). \end{aligned} \quad (23)$$

В шестой главе излагаются результаты о возмущении гиперболической системы Дирака, связанной с уравнениями ДС-1, и о возмущении солитона (дромиона) уравнений ДС-1. Эти результаты получены в работах автора [4], [10] и [11].

В первой части шестой главы приводится теория возмущений для гиперболической системы Дирака, связанной с уравнением ДС-1. Сформулированные здесь теоремы идейно близки к теоремам из второй главы о разложении произвольных функций по произведениям решений системы Дирака и о решении линеаризованного уравнения ДС методом Фурье. Результаты о возмущении гиперболической системы Дирака можно интерпретировать как утверждение об устойчивости решения обратной задачи по отношению к малому возмущению потенциала.

В следующей части шестой главы строится асимптотическое решение возмущенного, вообще говоря, неинтегрируемого МОЗР уравнения

$$\begin{aligned} &i\partial_t Q + \frac{1}{2}(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + (g_1+g_2)Q = \varepsilon i F,\\ &\partial_\xi G_1 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\eta|Q|^2, \quad \partial_\eta G_2 = -\frac{\kappa}{2}\partial_\xi|Q|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь ε – малый параметр, $F \equiv AQ$ – возмущающий оператор.

Рассматривается возмущение солитонного (дромионного) решения невозмущенного уравнения ДС-1. Дромионное решение хорошо известно в силу того, что это, по-видимому, первое из найденных решений

(2+1)-мерных интегрируемых уравнений, которое экспоненциально убывает во всех пространственных направлениях.

Асимптотическое по $\mathrm{mod}(O(\varepsilon^2))$ решение уравнений (24) строится в виде:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= W(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon U(\xi,\eta,t,\tau), \\ G_1(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= g_1(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon h_1(\xi,\eta,t,\tau), \\ G_2(\xi,\eta,t,\varepsilon) &= g_2(\xi,\eta,t,\tau) + \varepsilon h_2(\xi,\eta,t,\tau), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время. Главный член асимптотики имеет вид:

$$\begin{aligned} W(\xi,\eta,t,\tau) &= q(\xi,\eta,t;\rho(\tau)), \\ g_1(\xi,\eta,t,\tau) &= u_1(\eta) - \frac{\kappa}{2}\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \partial_\eta |W(\xi',\eta,t,\tau)|^2, \\ g_2(\xi,\eta,t,\tau) &= u_2(\xi) - \frac{\kappa}{2}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \partial_\xi |W(\xi,\eta',t,\tau)|^2. \end{aligned}$$

Здесь $q(\xi,\eta,t;\rho)$ – дромионное решение уравнения Деви-Стюартсона-1:

$$q(\xi,\eta,t;\rho) = \frac{\mu\lambda\rho\exp(it(\lambda^2+\mu^2))}{2\cosh(\mu\xi)\cosh(\lambda\eta)(1-\kappa|\rho|^2\frac{\mu\lambda}{16}(1+\tanh(\lambda\eta))(1+\tanh(\mu\xi)))},$$

функции $u_1(\eta)$ и $u_2(\xi)$ соответствуют дромионным граничным условиям:

$$u_1(\xi) = \frac{\lambda^2}{2\cosh^2(\lambda\eta)}, \quad u_2(\xi)\frac{\mu^2}{2\cosh^2(\mu\xi)}.$$

Обозначим $\gamma(\tau) = 1 - \kappa\frac{\mu\lambda}{4}|\rho(\tau)|^2$, $\gamma_0 = \gamma(0)$.

Теорема 6. *Если*

$$\gamma(\tau) = \gamma_0^{\exp(2A\tau)}, \quad Arg(\rho(\tau)) \equiv const,$$

где $\gamma_0 > 1$ при $\kappa = -1$ и $0 < \gamma_0 < 1$ при $\kappa = 1$, тогда асимптотическое по $mod(O(\varepsilon^2))$ решение (25) равномерно пригодно при $t = O(\varepsilon^{-1})$.

Последняя – седьмая глава состоит из двух частей. В первой части строятся асимптотики по параметрам многомерных интегралов со слабой особенностью. Эти интегралы встречаются при построении асимптотик решений нелинейных уравнений с помощью МОЗР в третьей главе. Во второй части седьмой главы строится равномерная асимптотика интеграла типа Коши. Похожие интегралы встречаются при построении асимптотики уравнения ДС-1 в пятой главе.

Список литературы

[1] Гадыльшин Р.Р., Киселев О.М. О бессолитонной структуре возмущенного солитонного решения уравнения Деви-Стюартсона. Теоретическая и математическая физика, 1996, т.106, n2, с.167-173.

[2] Гадыльшин Р.Р., Киселев О.М. Структурная неустойчивость солитона уравнения Деви-Стюартсона II. Теоретическая и математическая физика, 1999, т.118, n3, с.354-361.

[3] Киселев О.М. Асимптотика многомерного интеграла Коши с быстро осциллирующей экспонентой. Математические заметки, 1995, т.58, вып.2, с.231-242.

[4] Киселев О.М. Метод Фурье для линеаризованного уравнения Деви-Стюартсона I. В кн. Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. III. Дифференциальные уравнения. Уфа, 1996, с.93-97.

[5] Киселев О.М. Асимтпотика бессолитонного решения уравнения Деви-Стюартсона II. Дифференциальные уравнения, 1997, т.33, n6, с.812-819.

[6] Киселев О.М. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Деви-Стюартсона I. Теоретическая и математическая физика, 1998, т.114, n1, с.104-114.

[7] Киселев О.М. Базисные функции, связанные с двумерной системой Дирака. Функциональный анализ и его приложения,1998, т.32, n1, с.56-59.

[8] Киселев О.М. Асимптотика решения двумерной системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами. Математический сборник, 1999, т190, n2, с.71-92.

[9] Gadyl'shin R.R., Kiselev O.M. Asymptotics of perturbed soliton solution for the Davey-Stewartson II equation. http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9801014.

[10] Kiselev O.M. Perturbation theory for the Dirac equation in two-dimensional space. Journal of Mathematical Physics, 1998, v.39, pp.2333-2345.

[11] Kiselev O.M. Dromion perturbation for the Davey-Stewartson-1 equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2000, v.7, n4, pp.411-422.

[12] Kiselev O.M. Asymptotic behaviour of a solution of the Kadomtsev-Petviashvili-2 equation. Proceedings of the Steklov's Institute of Mathematics. suppl., 2001, n1, S107-S139.